DTU Library

Concrete Structures - Betonkonstruktioner

Løsninger

Goltermann, Per

Publication date:
2013

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Concrete Structures - Betonkonstruktioner

Løsninger


Per Goltermann

Department of Civil Engineering

DTU Civil Engineering
Department of Civil Engineering

Betonkonstruktioner

Januar 2012

Løsninger til opgaverne i det grundlæggende kursus i betonkonstruktioner

Denne fil rummer løsningerne til alle de opgaver, der anvendes i den grundlæggende undervisning i betonkonstruktioner på Danmarks Tekniske Universitet og vil blive reviderede og supplerede når behovet melder sig.

Opgaverne ligger i den rækkefølge de normalt anvendes i undervisningen, der dækker konstruktionsmaterialerne stål og beton og de mest almindelige konstruktionsdele: Bjælker, søjler og plader.

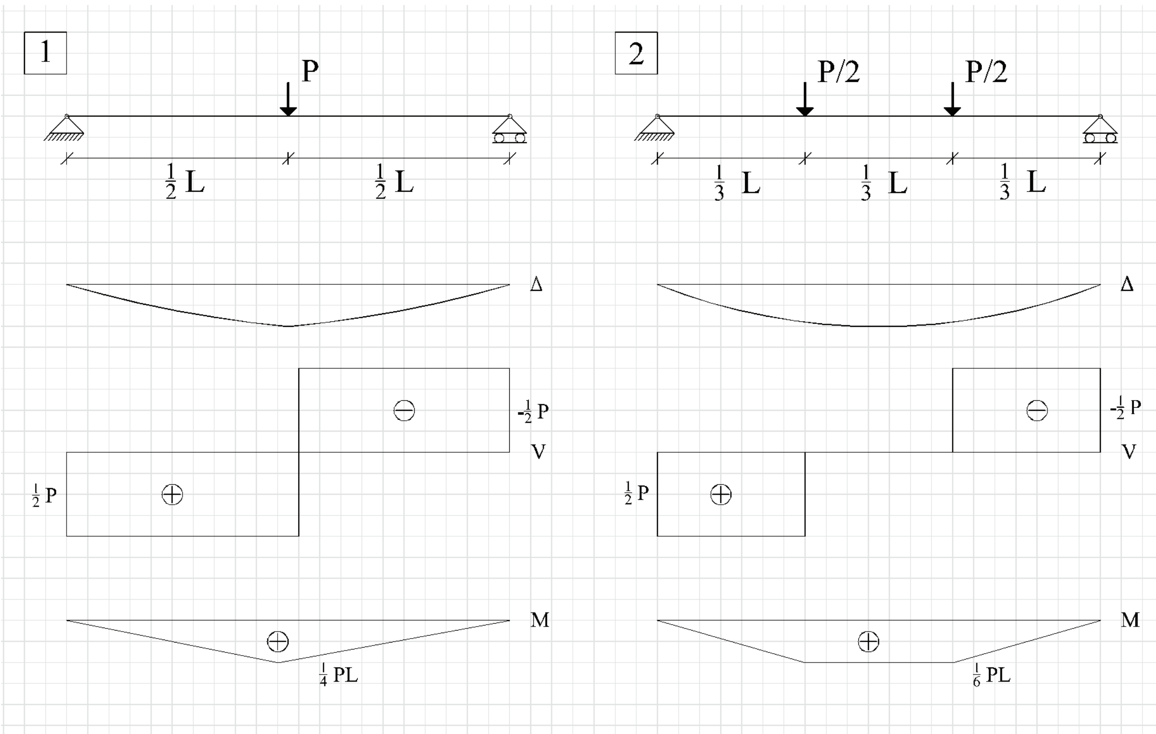
De tilhørende opgavetekster er til rådighed i en tilsvarende publikation, som også kan downloades på www.betonkonstruktioner.byg.dtu.dk, hvor yderligere undervisningsmateriale vil være til rådighed.

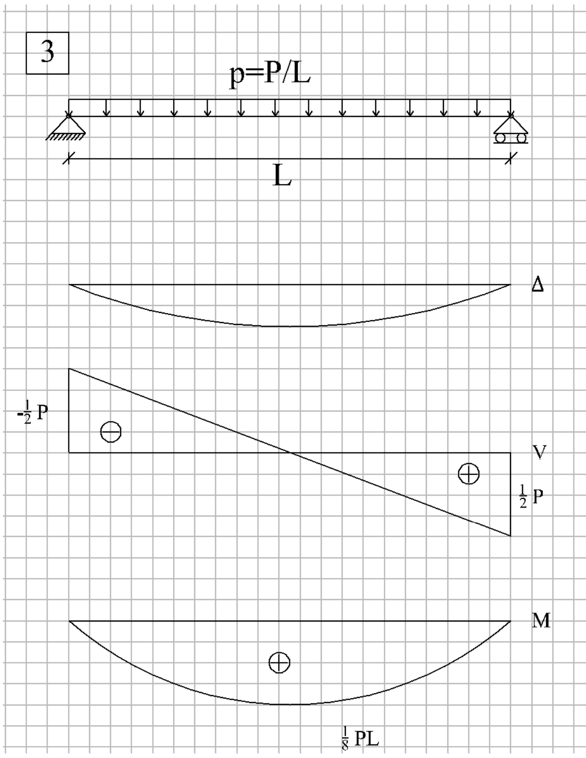
Venlig hilsen

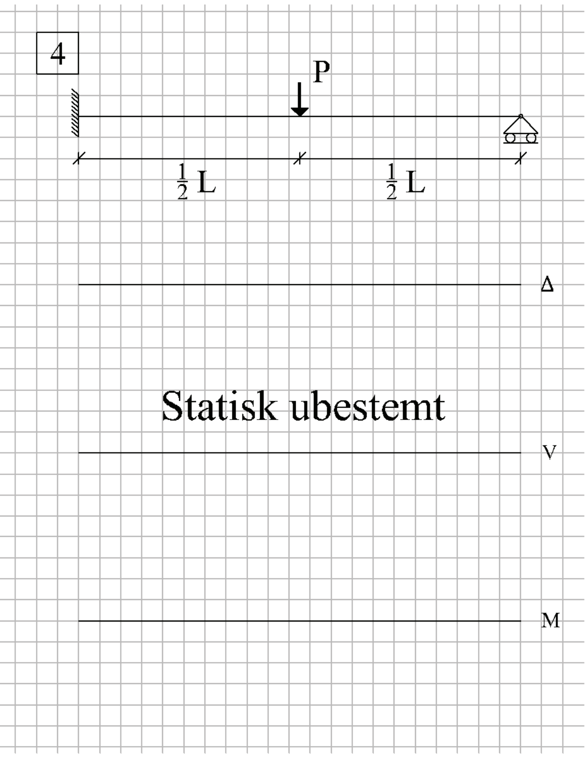
Per Goltermann

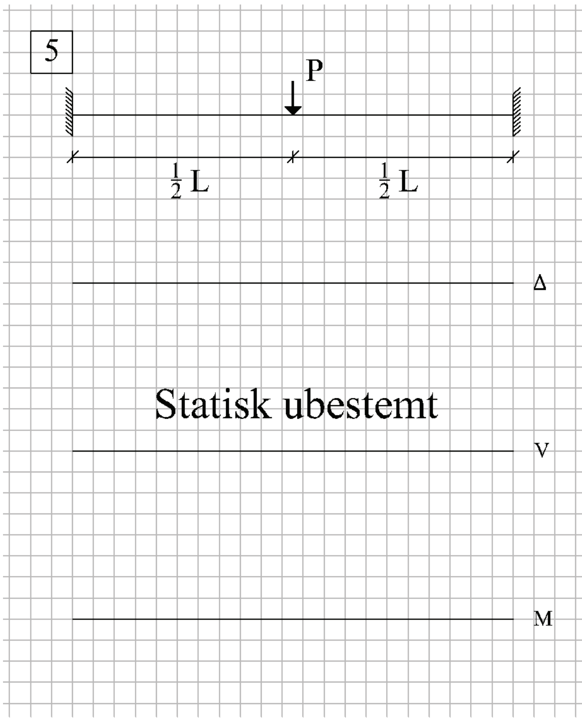
Opgave B11-01 - Besvarelse

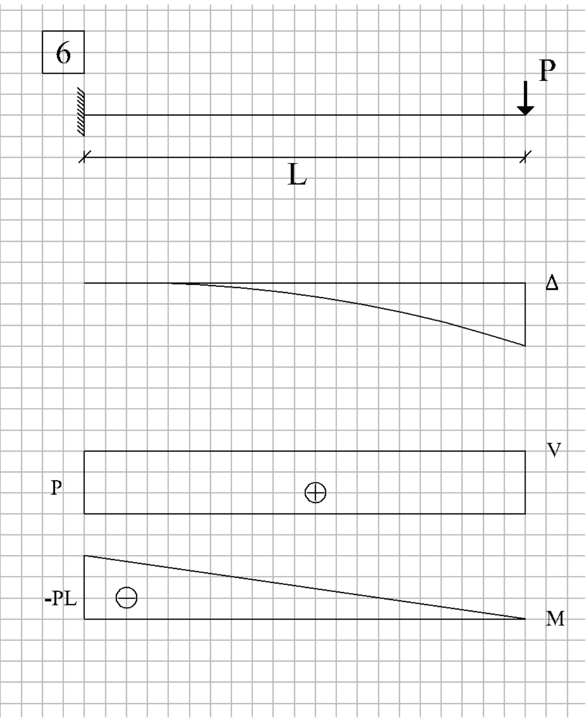
Det bemærkes at bjælkerne 4 og 5 er statisk ubestemte og at snitkraftfordelingen derfor ikke skal bestemmes. Dette skyldes at snitkraftvariationen i statisk ubestemte konstruktioner afhænger af fx stivheder og dette vil I senere lære afhænger af hvad armeringsmængde, der lægges i forskellige steder konstruktionen.




3
p=P/L
L
Δ
-½ P
V
½ P
M
⅛ PL

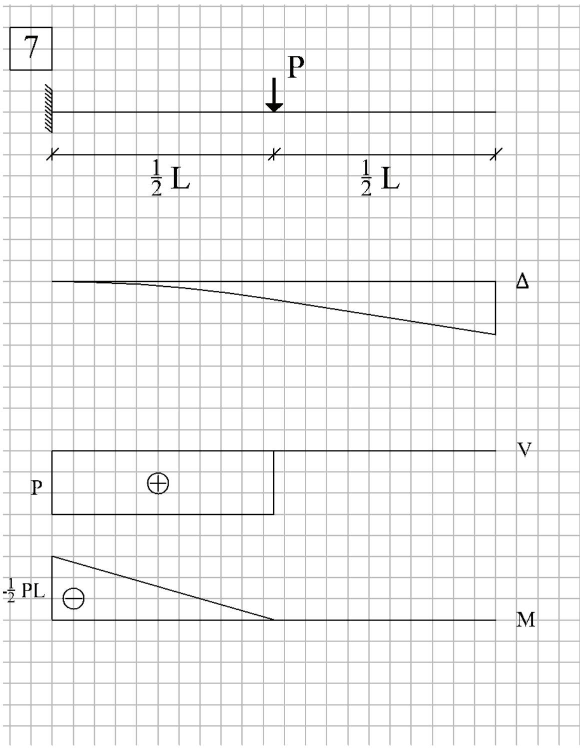

4
P
½ L
½ L
Δ
Statisk ubestemt
V
M

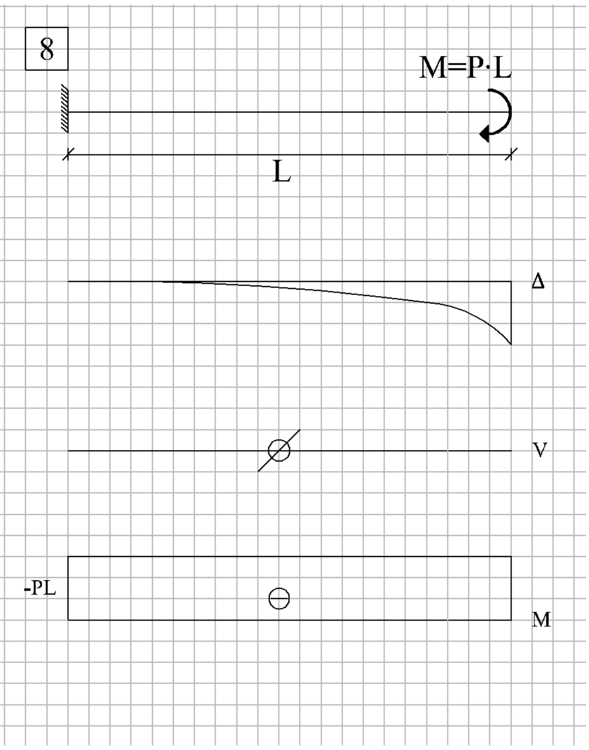

5
P
½ L
½ L
Δ
Statisk ubestemt
V
M

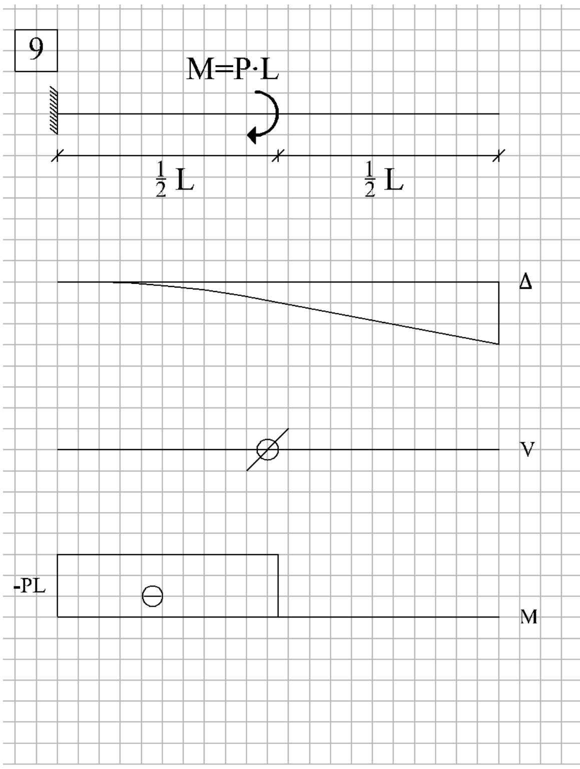

6
P
L
Δ
V
P
-PL
M

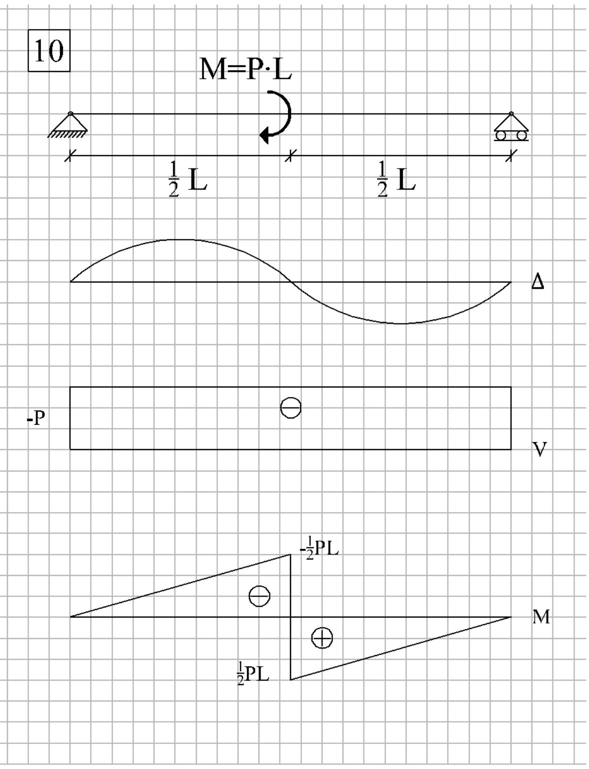
Betonkonstruktioner

Januar 2012









Betonkonstruktioner

Januar 2012

Opgave B11-02 - Besvarelse

Spørgsmål 1:

$$f_{ctk} = 0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 30^{2/3} = 2,03\ MPa$$

$$E_{cok} = 51000 \cdot \frac{f_{ck}}{f_{ck} + 13} = 51000 \cdot \frac{30}{30+13} = 35581\ MPa$$

Spørgsmål 2:

Det ses at man kan beregne styrkeudviklingen indenfor de første 28 modenhedsdøgn som

$$f_{ck}(t) = f_{cm}(t) - 8MPa > 20MPa \Rightarrow f_{cm}(t) > 28MPa$$

$$f_{cm}(t) = f_{cm} \exp\left(s\left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right)\right) = 40 \cdot \exp\left(0,2\left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right)\right) > 28MPa \Rightarrow t > 3,61døgn$$

idet vi har anvendt s=0,2 for cement i klasse R (formlerne 1.1 og 1.2 er anvendte)

Bestemmer man E_{cok} for f_{ck}=20MPa finder man

$$E_{cok} = 51000 \cdot \frac{20}{20+13} = 30910\ MPa > 20000MPa$$

Vi kan derfor se at man kan afforme (fjerne støbeformene) efter 3,61 døgn, dvs. det rigtige svar er 4 modenhedsdøgn.

Bemærkning

Udviklingen af modenhedsdøgn afhænger meget af betonens temperatur og dermed af den omgivende temperatur. Dette betyder at 4 modenhedsdøgn ikke nødvendigvis svarer til 4 almindelige døgn, men kan være væsentlig længere ved temperaturer under 20^{o}C og kortere ved højere temperaturer.

Spørgsmål 3:

Udtørringssvindet $\varepsilon_{cd,\infty}$ efter uendelig lang tid bestemms som

$$\varepsilon_{cd,\infty} = \varepsilon_{cd}(t=\infty) = \beta(t=\infty, t_s) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{cd,0} = k_h \cdot \varepsilon_{cd,0}$$

Til beregning af k_h findes skal vi finde

$$A_c = 200 \cdot 200 = 40 \cdot 10^3 \ mm^2 \ og \ u = 200 + 200 + 200 + 200 = 800 \ mm \Rightarrow$$

$$h_o = \frac{2 \cdot 40 \cdot 10^3}{800} = 100 \ mm$$

hvorefter vi kan slå op at

$$k_h = 1,00$$

Vi kan beregne svindparameteren

$$\varepsilon_{cd,0} = 1,32\left(\left(220 + 110\alpha_{ds1}\right)\exp\left(-\alpha_{ds2}\frac{f_{cm}}{10}\right)\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3\right) \cdot 10^{-6}$$

$$= 1,32\left(\left(220 + 110 \cdot 6\right)\exp\left(-0,11 \cdot \frac{40}{10}\right)\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{70}{100}\right)^3\right) \cdot 10^{-6} = 491,5 \cdot 10^{-6}$$

hvorefter det samlede udtørringssvind bliver

$$\varepsilon_{cd,\infty} = k_h \cdot \varepsilon_{cd,0} = 1,00 \cdot 491,5 \cdot 10^{-6} = 491,5 \cdot 10^{-6}$$

Det autogene svind bestemmes som

$$\varepsilon_{ca,\infty} = 2,5 \cdot (f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6} = 2,5 \cdot (30 - 10) \cdot 10^{-6} = 50,0 \cdot 10^{-6}$$

Det samlede svind bestemmes nu som

$$\varepsilon_{c,\infty} = \varepsilon_{cd,\infty} + \varepsilon_{ca,\infty} = 491,5 + 50,0 = 541,5 \cdot 10^{-6}$$

Spørgsmål 4:

Prismets samlede tøjning sættes til $\varepsilon_T \Rightarrow$

$$\sigma_c = E_{cok} \cdot \left(\varepsilon_{c,\infty} - \varepsilon_T\right) \qquad \text{(Træk)}$$

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_T \qquad \text{(Tryk)}$$

Vi stiller nu kraftligevægten op, dvs. vi bestemmer normalkraften og sætter den lig med 0

$$N = -\left(A_c - A_s\right)\sigma_c + A_s\sigma_s = 0 \Leftrightarrow \left(A_c - A_s\right)\cdot E_{cok}\left(\varepsilon_{c,\infty} - \varepsilon_T\right) - A_s E_s \varepsilon_T = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{c,\infty} \cdot \frac{\left(A_c - A_s\right)\cdot E_{cok}}{\left(A_c - A_s\right)\cdot E_{cok} + A_s E_s}$$

$$= 541,5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\left(40\cdot 10^3 - 4\pi\left(12/2\right)^2\right)\cdot 35581}{\left(40\cdot 10^3 - 4\pi\left(12/2\right)^2\right)\cdot 35581 + 4\pi\left(12/2\right)^2 \cdot 2\cdot 10^5} = 507,0\cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_c = E_{cok}(\varepsilon_{cs,\infty} - \varepsilon_T) = 35581\cdot(541,5\cdot 10^{-6} - 507,0\cdot 10^{-6}) = 1,23MPa < \mathrm{f}_{ctk} = 2,03MPa$$

Da trækspændingen er mindre end trækstyrken, så revner betonen ikke.

<u>Spørgsmål 5:</u>

Da prismet er fastholdt imod sammentrækning, så er prismets tøjning givet som

$\varepsilon_T = 0$

Vi beregner nu trækspændingen i betonen som

$$\sigma_c = E_{cok}\left(\varepsilon_{c,\infty} - \varepsilon_T\right) = 35581 \cdot (541,5 \cdot 10^{-6} - 0) = 19,3MPa > f_{ctk} = 2,03MPa$$

Trækspændingen overstiger trækstyrken og betonen vil derfor revne.

<u>Bemærkninger til spørgsmål 3 til 5:</u>

Konstruktioner i 100% relativ fugt ikke svinder og dermed ikke får svindtøjninger eller svindrevner. En del underjordiske konstruktioner (kældre, Øresundstunnelen m.m.) får derfor ikke svindrevner.

Betoner i konstruktioner, som kan tørre ud får altid væsentlig store svindtøjninger.

Hvis konstruktionselementet ikke er fastholdt mod sammentrækning (søjler, korte bjælker, brodragere på rullelejer, korte præfab elementer), så vil svindet <u>normalt</u> ikke lede til svindrevner, da trækspændingerne er mindre end trækstyrken. Betonsøjlerne på DTU eller Rævehøjbroen over motorvejen er gode eksempler på dette.

Hvis konstruktionselementet er fastholdt mod sammen trækning, så vil svindet <u>normalt</u> lede til revner, da trækspændingerne bliver større end trækstyrken. En kantbjælke på en bro eller en lang altanplade (f.x. 30 m), som er støbt sammen med etagedækket inde i huset er et godt eksempel på denne situation. Altanpladen vil denne typisk få revner vinkelret på husets facade (da huset fastholder altanpladen mod sammentrækning), men ikke få revner parallelt med facade, da det kun er armeringen, som hæmmer betonens evne til at trække sig sammen.

Betonkonstruktioner
Januar 2012

Opgave B11-03 - Besvarelse

Spørgsmål 1:

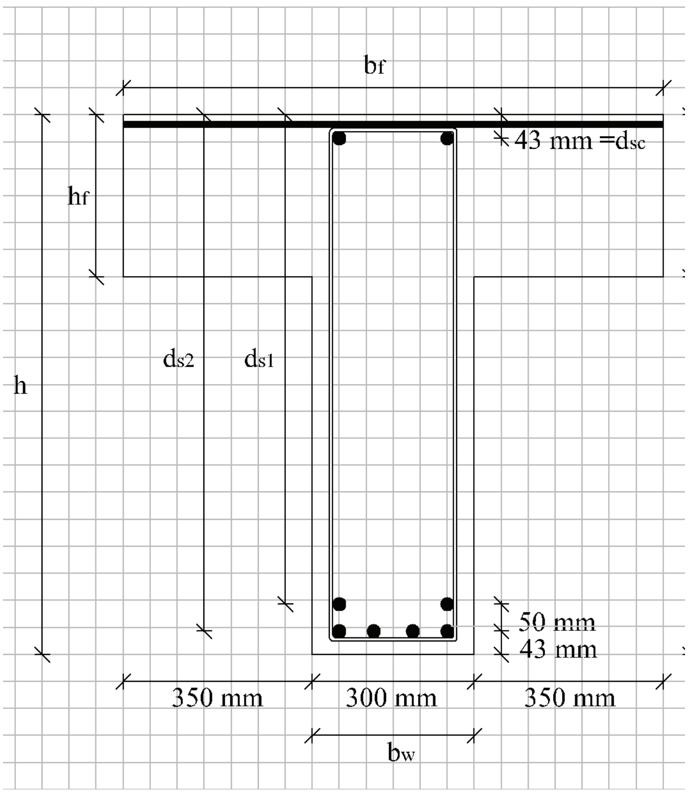
Vi beregner betonens stivhed og forholdet α imellem stålets og betonens stivhed som

$$E_{cok} = 51000 \frac{f_{ck}}{f_{ck}+13} = 51000 \frac{30}{30+13} = 35581 MPa \Rightarrow$$

$$E_{cm} = 0,7 E_{cok} = 0,7 \cdot 35581 = 24907 MPa \Rightarrow$$

$$\alpha = E_s / E_{cm} = 2 \cdot 10^5 / 24907 = 8,0$$

Vi indfører nogle betegnelser i tværsnittet for at kunne opstille vores formler



På figuren ses $b_f = 1000mm \quad b_w = 300mm \quad h_f = 325mm \quad h = 1000mm$

Armeringslagenes effektive højder og arealer kan bestemmes som

$$A_{sc} = 2\pi(24/2)^2 = 905mm^2 \quad d_{sc} = 43mm$$
$$A_{s1} = 2\pi(24/2)^2 = 905mm^2 \quad d_{s1} = 300 + 700 - 43 - 50 = 907mm$$
$$A_{s2} = 4\pi(24/2)^2 = 1810mm^2 \quad d_{s2} = 300 + 700 - 43 = 957mm$$

ligesom den samlede trækarmerings areal og effektive højde kan bestemmes som

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 905 + 1810 = 2715mm^2$$
$$d = (A_{s1}d_1 + A_{s2}d_2)/(A_{s1} + A_{s2}) = (905 \cdot 907 + 1810 \cdot 957)/(905 + 1810) = 940,3mm$$

Da tværsnittet er revnet skal trykzonens højde x beregnes ved at det statiske moment af det transformerede tværsnit S_t om nullinien skal være lig 0. Vi stiller ligningerne op og gætter på at trykzonen bliver oppe i den brede flange, så trykzonen er rektangulær og bruger en ligningsløser til at bestemme x:

$$S_t = b_f x(-x/2) - (\alpha - 1)A_{sc}(x - d_{sc}) + \alpha A_{s1}(d_1 - x) + \alpha A_{s2}(d_2 - x) =$$
$$1000x(-x/2) - (8,0 - 1) \cdot 905 \cdot (x - 43) + 8,0 \cdot 905 \cdot (907 - x) + 8,0 \cdot 1810 \cdot (957 - x) = 0$$
$$\Rightarrow x = 177,3mm$$

Da x < h_f=325mm var vores gæt korrekt (ellers skulle vi til at tage hensyn til den del af trykzonen der gik ned i den smallere krop). Vi kan gå videre med at beregne det transformerede tværsnits inertimoment som

$$I_t = \frac{1}{12} b_f x^3 + b_f x(x/2)^2 + (\alpha - 1)A_{sc}(x - d_{sc})^2 + \alpha A_{s1}(d_1 - x)^2 + \alpha A_{s2}(d_2 - x)^2$$
$$= \frac{1}{12} 1000 \cdot 177,3^3 + 1000 \cdot 177,3 \cdot (177,3/2)^2 + (8,0 - 1) \cdot 905 \cdot (177,3 - 43)^2$$
$$+8,0 \cdot 905 \cdot (907 - 177,3)^2 + 8,0 \cdot 1810 \cdot (957 - 177,3)^2 = 14,669 \cdot 10^9 mm^4 \Rightarrow$$
$$EI = E_{cm} I_t = 24907 \cdot 14,669 \cdot 10^9 = 366,7 \cdot 10^{12} Nmm^2$$

Vi beregner nu nedbøjningen på midten af bjælken (ved brug af Teknisk Ståbi) som

$$u_{\max} = \frac{1}{48} \frac{PL^3}{EI} = \frac{1}{48} \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 10000^3}{366,7 \cdot 10^{12}} = 14,2mm < L/500 = 20mm$$

og konstanterer at den er mindre end det krævede.

Spørgsmål 2:

Ved langtidslast falder betonens E-modul til ¼ af korttidsværdien og α stiger til det 4-dobbelte, dvs.

$$E_{cm} = 24907/4 = 6227 MPa$$
$$\alpha = 8,0 \cdot 4 = 32$$

Hvorefter beregningerne gentages som før

$$S_t = 1000x(-x/2) - (32-1) \cdot 905 \cdot (x-43) + 32 \cdot 905 \cdot (907-x) + 32 \cdot 1810 \cdot (957-x) = 0 \Rightarrow$$
$$x = 308,7mm$$

Da x < h_f=325mm var vores gæt korrekt (ellers skulle vi til at tage hensyn til den del af tryk-zonen der gik ned i den smallere krop). Vi kan gå videre med at beregne det transformerede tværsnits inertimoment som

$$I_t = \frac{1}{12}1000 \cdot 308,7^3 + 1000 \cdot 308,7 \cdot (308,7/2)^2 + (32-1) \cdot 905 \cdot (308,7-43)^2$$
$$+32 \cdot 905 \cdot (907-308,7)^2 + 32 \cdot 1810 \cdot (957-308,7)^2 = 46,604 \cdot 10^9 mm^4 \Rightarrow$$
$$EI = E_{cm} I_t = 6227 \cdot 46,604 \cdot 10^9 = 290,20 \cdot 10^{12} Nmm^2$$

Vi beregner bjælkens egenvægt som

$$g = 24 \cdot (1,0 \cdot 0,325 + 0,3 \cdot 0,675) = 12,66 kN/m$$

og kan nu finde nedbøjningen på midten af bjælken (ved brug af Teknisk Ståbi) som

$$u_{\max} = \frac{5}{384}\frac{(p+g)L^4}{EI} = \frac{5}{384}\frac{(20+12,66) \cdot 10000^4}{290,20 \cdot 10^{12}} = 14,66mm < L/250 = 40mm$$

og konstanterer at den er mindre end det krævede.

<u>Bemærk</u> at selvom langtidsstivheden er ¼ af korttidsstivheden, så falder tværsnittets stivhed kun med 20 %. Dette skyldes at det primært er trækarmeringen og den effektive høJde der sty-rer stivheden.

Spørgsmål 3:

Vi beregner bjælkens maksimale revnevidde som

$$w_w = s_{r,\max}(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = s_{r,\max}\varepsilon_{sm}$$

hvor den maksimale revneafstand beregnes som

$$s_{r,\max} = 3,4c + 0,17\frac{A_{c,eff}}{A_s}Ø \text{ da armeringsjernenes afstand} \leq 5(c + Ø/2) = 5(25 + 24/2) = 185mm$$

idet trækarmeringen diameter Ø er 24 mm og dæklaget c er 25 mm iflg opgaven. Vi kan derfor beregne

$$h_{c,ef} = \min\begin{cases} 2,5(h-d) = 2,5(1000-940,3) = 149,3mm \\ \dfrac{h-x}{3} = \dfrac{1000-299,8}{3} = 233,4mm \\ \dfrac{h}{2} = \dfrac{1000}{2} = 500mm \end{cases}$$

$$A_{c,eff} = b_w h_{c,ef} = 300 \cdot 149,3 = 44775mm^2$$

hvorefter vi kan beregne den maksimale revneafstand som

$$s_{r,\max} = 3,4c + 0,17\frac{A_{c,eff}}{A_s}Ø = 3,4 \cdot 25 + 0,17\frac{44775}{905+1810}24 = 152,3mm$$

Vi skal nu beregne tøjningsdifferenen

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \max\begin{cases} \dfrac{\sigma_s}{E_s} - \dfrac{k_t}{E_s}\left(\dfrac{A_{c,eff}}{A_s} + \alpha\right)f_{ctm} \\ 0,6 \cdot \dfrac{\sigma_s}{E_s} \end{cases}$$

hvor

$\alpha = 8,0$ (korttid iflg lærebogen !)

$f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{2/3} = 0,30 \cdot 30^{2/3} = 2,90MPa$

$k_t = 0,4$

Trækarmeringens tøjning beregnes i trækarmeringens tyngdepunkt som

$$\frac{\sigma_s}{E_s} = \varepsilon_{sm} = \frac{M}{EI}(d-x) = \frac{1/8 \cdot (20+12,66) \cdot 10000^2}{290,20 \cdot 10^{12}}(940,3-308,7) = 0,889 \cdot 10^{-3}$$

Vi beregner herefter tøjningsdifferencen som

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \max \begin{cases} 0,889 \cdot 10^{-3} - \dfrac{0,4}{2 \cdot 10^5}\left(\dfrac{44775}{905+1810} + 8,0\right) 2,90 = 0,747 \cdot 10^{-3} \\ 0,6 \cdot 0,889 \cdot 10^{-3} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0,533 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

og finder derefter den maksimale revneafstand som

$$w_w = s_{r,\max}(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 152,3 \cdot 0,747 \cdot 10^{-3} = 0,11 mm$$

og konstanterer at den er væsentligt mindre end de krævede 0,2 mm.

Bemærk at i en række tilfælde i aggressivt miljø vil der ofte blive krævet større dæklag og mindre revnevidder, hvilket kan bevirke at revneviddekravet vil bestemme armeringsmængden.

Spørgsmål 4:

Vi kan nemt beregne det maksimale moment som

$$M_{Ed} = \frac{1}{8}(p+g)L^2 + \frac{1}{4}PL = \frac{1}{8}(20+12,66)\cdot 10000^2 + \frac{1}{4}250\cdot 10^3 \cdot 10000 = 1033,3kNm$$

Til at eftervise bæreevnen skal vi bruge regningsmæssige materialestyrker, brudtøjninger for stål og beton og armeringens flydetøjningen

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 30/1,45 = 20,69MPa$$
$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 550/1,2 = 458,3MPa$$
$$\varepsilon_{cu3} = 3,5\cdot 10^{-3} \text{ for } f_{ck} \leq 50MPa$$
$$\varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s = 550/200000 = 2,292\cdot 10^{-3}$$
$$\varepsilon_{uk} = 5,0\cdot 10^{-2} \text{ for stål i klasse B}$$

Ved vores beregninger vælger vi (på den sikre side) at ignorere trykarmeringen og vi antager (vi gætter på) 1) at den plastiske trykzone (højde y) bliver oppe i den brede flange og 2) at tværsnittet er normaltarmeret. Vi kan nu stille kraftligevægten op og beregne den plastiske trykzonehøjde y

$$N = b_f y f_{cd} - A_s f_{yd} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{A_s f_{yd}}{b_f f_{cd}} = \frac{2715\cdot 458,3}{1000\cdot 20,69} = 60,14mm$$

Vi ser at den plastiske trykzone bliver oppe i den brede flange ($y<h_f$), så nu skal vi også lige beregne trækarmeringens tøjning ε_s og kontrollere at $\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s < \varepsilon_{uk}$, svarende til flydning men ikke overrivning

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu3}}{x}(d-x) = \frac{3,5\cdot 10^{-3}}{1,25\cdot 60,14}(940,3 - 1,25\cdot 60,14) = 40,3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\varepsilon_{yd} = 2,92\cdot 10^{-3} \leq \varepsilon_s = 40,3\cdot 10^{-3} \leq \varepsilon_{uk} = 5,0\cdot 10^{-2}$$

Vi har her ovenover udnyttet af trykzonens højde er x=1,25y da den plastiske trykzone var y=0,8x. Da der er ren bøjning (N=0), kan vi tage momentet om et hvilket som helst punkt i tværsnittet (fx centrum i trykzonen) og finder derfor

$$M_{Rd} = A_s f_{yd} z = A_s f_{yd}(d - ½y) = 2715\cdot 458,3\cdot(940,3 - ½\cdot 60,14) = 1133,0kNm$$

<u>Bemærk</u> at i dette tilfælde med en rektangulær trykzone og trækarmering, ville man i praksis ofte anvende ω-metoden. Inddrages trykarmering så stiger momentbæreevnen kun nogle få procent, men beregningerne bliver en del mere komplicerede.

Spørgsmål 5:

Ved bæreevneeftervisningen kan vi på den sikre side sætte den dimensionsgivende forskydningskraft

$$V_{Ed} = R = \tfrac{1}{2}(p+g)L + \tfrac{1}{2}P = \tfrac{1}{2}\cdot(20+12,66)\cdot 10 + \tfrac{1}{2}\cdot 250 = 288,3kN$$

Fra sidste spørgsmål ved vi at

$$z = d - \tfrac{1}{2}y = 940,3 - \tfrac{1}{2}\cdot 60,14 = 910,2mm$$

og da bøjler ofte er den dyreste armering, så vil vi normalt prøve at opnå den bedste udnyttelse af bøjlerne og vil derfor vælge at anvende

$$\cot\theta = 2,5$$

Vi kan nu beregne de forskydningsstyrker som hhv. bøjler, trykstringer og langsgående trækarmering kan optage ved dette valg af $\cot\theta$ som

$$V_{Rd,w} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} \cot\theta = \frac{2\pi(6/2)^2}{150} 910,2\cdot 458,3\cdot 2,5 = 393,2kN$$
$$v_v = 0,7 - f_{ck}/200 = 0,7 - 30/200 = 0,55$$
$$V_{Rd,c} = v_v f_{cd} b_w z \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = 0,55\cdot 20,69\cdot 300\cdot 910,2 \frac{2,5}{1+2,5^2} = 1071,58kN$$
$$V_{Rd,l} = \frac{2 f_{yd} A_s}{\cot\theta} = \frac{2\cdot 458,3\cdot 2715}{2,5} = 995,4kN$$
$$\Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rd,w}; V_{rd,c}; V_{Rd,l}) = 393,2kN \geq V_{Ed}$$

<u>Bemærk</u> at i dette tilfælde med fuld forankring var det en rigtig god ide at udnytte bøjlerne mest muligt, da det var deres styrke, som begrænsede den bæreevne vi kunne eftervise

<u>Spørgsmål 6:</u>

I denne situation har vi kun en vederlagsdybde på a=250 mm og denne dybde er måske ikke nok til at sikre fuld forankring af trækarmeringen over vederlaget og det kan derfor være et problem at opnå den fornødne bæreevne, da vi ikke kan udnytte trækarmeringen fuldt ud. Vi skal derfor starte på at beregne hvad spænding der kan opbygges i trækarmeringen over en længde på a.

Basisforankringslængden og den maksimale spænding i trækarmeringen lige udenfor vederlaget beregnes som

$$l_b = 43\text{Ø} = 43 \cdot 24 = 1032mm \quad \Rightarrow \sigma_{s,\max} = \frac{250}{1032} 458,3 = 111,0MPa$$

Dette påvirker ikke beregningen af bøjlernes eller skråstringerens styrke, men den reducerer den forskydningskraft som den langsgående armering kan klare til

$$V_{Rd,l} = \frac{2\sigma_{s,\max} A_s}{\cot\theta} = \frac{2 \cdot 111,0 \cdot 2715}{2,5} = 241,1kN$$

$$\Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rd,w}; V_{rd,c}; V_{Rd,l}) = 241,1kN < V_{Ed} \approx R = 286,2kN \qquad \text{OBS !}$$

Med den reducerede forankring kan bjælken således IKKE bære lasten når vi 1) anvender $\cot\theta = 2,5$ og 2) anvender den konservative værdi af $V_{Ed} = R$.

<u>Den dokumenterede, efterviste bæreevne kan øges</u>, når vi 1) reducerer $\cot\theta$, fx til $\cot\theta = 2,0$ og 2) udnytter muligheden for at reducere forskydningskraften til den kraft der optræder i afstanden $z\cot\theta$ fra understøtningen. Vi beregner nu forskydningskraften

$$V_{Ed} = V(x = z\cot\theta) = R - (p+g)z\cot\theta = 288,3 - (20 + 12,66) \cdot 0,910 \cdot 2,0 = 228,9kN$$

og gentager beregningerne af bæreevnen fra sidste spørgsmål med den nye $\cot\theta$ værdi og finder

$$V_{Rd,w} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} \cot\theta = \frac{2\pi(6/2)^2}{150} 910,0 \cdot 458,3 \cdot 2,0 = 314,5kN$$

$$V_{Rd,c} = v_v f_{cd} b_w z \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = 0,55 \cdot 20,69 \cdot 300 \cdot 910,0 \frac{2,0}{1+2,0^2} = 1242,7kN$$

$$V_{Rd,l} = \frac{2\sigma_{s,\max} A_s}{\cot\theta} = \frac{2 \cdot 111,0 \cdot 2715}{2,0} = 301,4kN$$

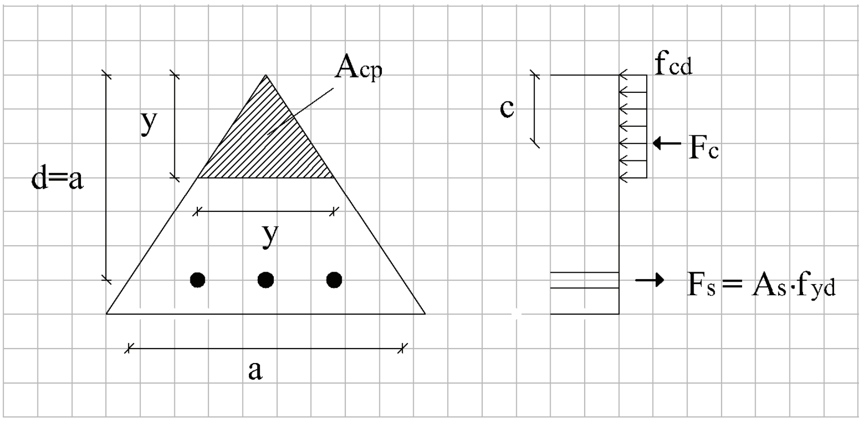
$$\Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rd,w}; V_{rd,c}; V_{Rd,l}) = 301,4kN \geq V_{Ed} = 228,9kN$$

<u>Bemærk</u> at vi ved den ændrede beregningsmodel reducerede V_{Ed} med 26 % og øgede V_{Rd} med 7 %, svarende til 44 % bedre udnyttelse af bjælkens forskydningskapacitet.

Opgave B11–04 - Besvarelse

Trykzonens højde sættes generelt til x og vi regner med plastisk spændingsfordeling stykket y=0,8 x ned fra toppen af tværsnittet, da f_{ck} < 50 MPa. Den plastiske del af trykzonen A_{cp} har et tyngdepunkt som ligger stykket c fra toppen af tværsnittet.

Tværsnit 1



Vandret projektion

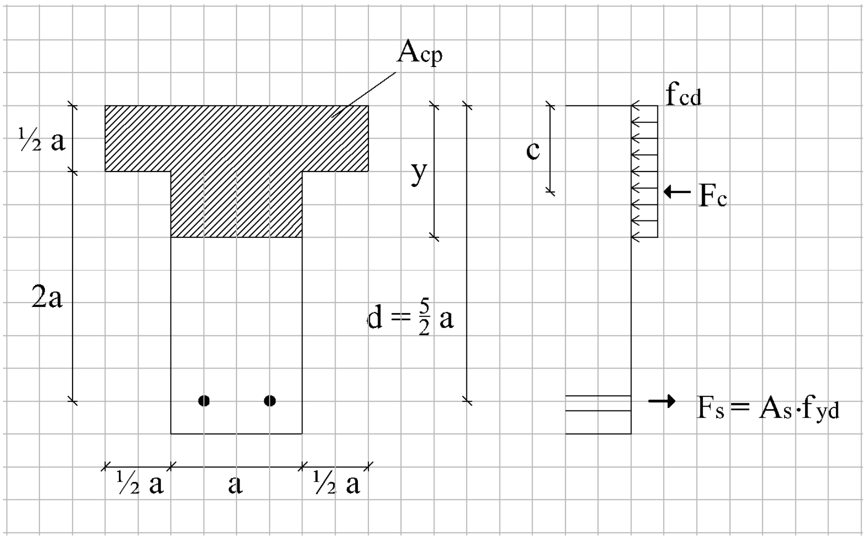
$$N = A_{cp} f_{cd} - A_s f_{yd} = 0 \Leftrightarrow A_{cp} = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd}} = \frac{a^2}{200} \cdot 25 = \frac{a^2}{8}$$

$$A_{cp} = \frac{1}{2} y^2 = \frac{a^2}{8} \Leftrightarrow y = \frac{a}{2}$$

Moment om armeringsniveau

$$M_u = F_c(y)\big(d - c(y)\big) = \frac{1}{8} a^2 f_{cd} \left(a - \frac{1}{3} a \right) = \underline{\underline{\frac{1}{12} a^3 f_{cd}}}$$

Tværsnit 2

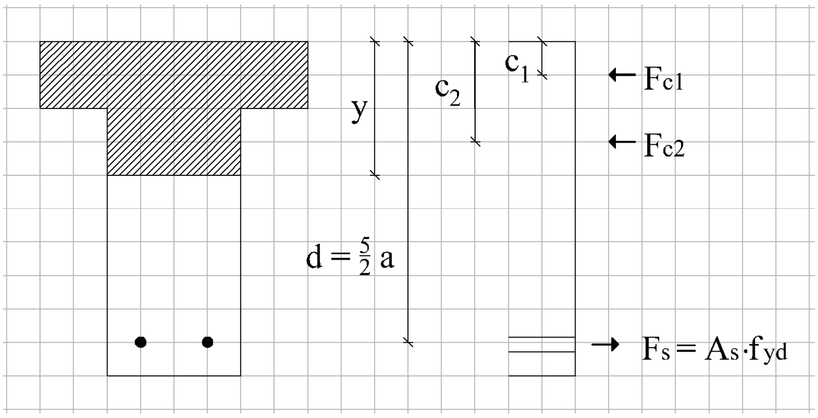


Vandret projektion

$$N = A_{cp} f_{cd} - A_s f_{yd} = 0 \Leftrightarrow A_{cp} = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd}} = \frac{3a^2}{40} \cdot 20 = \frac{3a^2}{2}$$

$$A_{cp} = 2a \cdot y \le a^2 \; for \; y \le \frac{a}{2} \; og \; A_{cp} = a^2 + a\left(y - \frac{a}{2}\right) > a^2 \; for \; y > \frac{a}{2} \Rightarrow A_{cp} = \frac{3a^2}{2a} \Rightarrow y = a$$

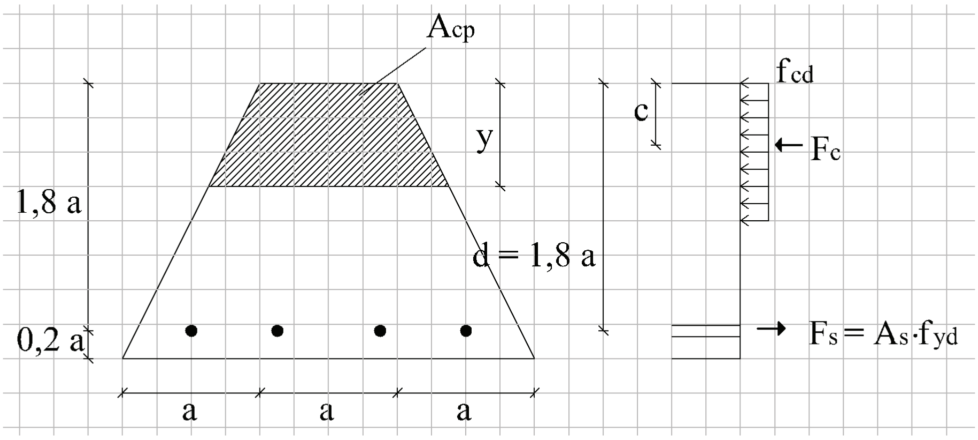
Moment om armeringsniveau



$$F_{c1} = a^2 f_{cd}, \qquad c_1 = \frac{a}{4}, \qquad F_{c2} = \frac{1}{2} a^2 f_{cd}, \qquad c_2 = \frac{3a}{4}$$

$$M_u = F_{c1}\left(d - c_1\right) + F_{c2}\left(d - c_2\right) = a^2 f_{cd}\left(\frac{5a}{2} - \frac{a}{4}\right) + \frac{1}{2} a^2 f_{cd}\left(\frac{5a}{2} - \frac{3a}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{25}{8} a^3 f_{cd}}}$$

Tværsnit 3

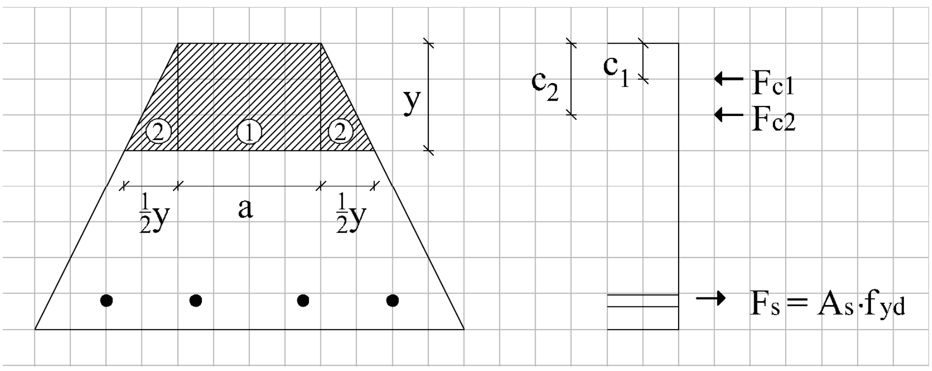


Vandret ligevægt

$$N = A_{cp} f_{cd} - A_s f_{yd} = 0 \Leftrightarrow A_{cp} = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd}} = \frac{a^2}{25} \cdot 28$$

$$A_{cp} = ay + \frac{1}{2} y^2 = \frac{28}{25} a^2 \Leftrightarrow y = \frac{4}{5} a$$

Moment om armeringsniveau



$$F_{c1} = \frac{4}{5} a^2 f_{cd}, \qquad c_1 = \frac{2}{5} a, \qquad F_{c2} = \frac{8}{25} a^2 f_{cd}, \qquad c_2 = \frac{8}{15} a$$

$$M_u = F_{c1}(d - c_1) + F_{c2}(d - c_2) = \frac{4}{5} a^2 f_{cd} \left(\frac{9}{5} a - \frac{2}{5} a \right) + \frac{8}{25} a^2 f_{cd} \left(\frac{9}{5} a - \frac{8}{15} a \right) = \frac{572}{375} a^3 f_{cd} = \underline{\underline{1{,}53\, a^3 f_{cd}}}$$

Bemærkning: Metoden er generelt anvendelig ved ren bøjning i normaltarmerede tværsnit.

Er det ikke opgivet at der er tale om normaltarmerede tværsnit kan man gætte på flydning og så beregne træktøjningen i trækarmeringen ε_s og så kontrollere at der er flydning, dvs. at $\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s < \varepsilon_{uk}$.

Betonkonstruktioner

Januar 2012

Opgave B11-05 - Besvarelse

Vi beregner og slår op og finder de grundlæggende materialeparametre

$$f_{ck} = 25MPa \Rightarrow f_{cd} = 25/1,45 = 17,2MPa$$
$$f_{uk} = 500MPa \Rightarrow f_{yd} = 500/1,2 = 416,7MPa$$
$$\varepsilon_{cu3} = 3,5 \cdot 10^{-3} \quad \varepsilon_{c3} = 2,0 \cdot 10^{-3}$$
$$\varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s = 416,7/2 \cdot 10^5 = 2,083 \cdot 10^{-3} \quad \varepsilon_{uk} = 50 \cdot 10^{-3}$$

Vi fastlægger også de geometriske størrelser

$$A_s = A_{sc} = 2\pi(20/2)^2 = 628mm^2$$
$$h = 400mm \quad d = 360mm \quad d_c = 40mm$$

Spørgsmål 1

N = 0 svarer til ren bøjning (≡punkt B i et klassisk M-N diagram). Vi antager at tværsnittet er normaltarmeret og stiller ligevægten op, så vi kan finde højden y af den plastiske trykzone

$$N_{ud} = b \cdot y \cdot f_{cd} - A_s f_{yd} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{A_s f_{yd}}{b \cdot f_{cd}} = \frac{628 \cdot 416,7}{200 \cdot 17,2} = 76,1mm$$

Vi kan herefter bestemme trykzonens højde x, samt tøjningen i trækarmeringen

$$x = y/0,8 = 76,1/0,8 = 95,1mm \Rightarrow$$
$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu3}}{x}(d-x) = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{95,1}(360 - 95,1) = 9,75 \cdot 10^{-3}$$

Da $\varepsilon_{yd} = 2,083 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_s = 9,75 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{uk} = 50 \cdot 10^{-3}$ er tværsnittet normaltarmeret og vi kan beregne brudmomentet som

$$M_{ud} = A_s f_{yd}(d - ½y) = 628 \cdot 416,7 \cdot (360 - ½ \cdot 76,1) = 84,2 \cdot 10^6 Nmm = 84,2kNm$$

Alternativt kan vi beregne et tværsnit, med rektangulær trykzone og et lag trækarmering udsat for ren bøjning efter ω-metoden

$$\omega_{und} = \lambda \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{uk}} \leq 0,8 \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 50 \cdot 10^{-3}} = 0,0523$$

$$\omega_{bal} = \lambda \cdot \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{yd}} = 0,8 \cdot \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 2,083 \cdot 10^{-3}} = 0,500$$

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \frac{628 \cdot 417}{200 \cdot 360 \cdot 17,2} = 0,212$$

Da $\omega_{und} < \omega < \omega_{bal}$ er tværsnittet normalarmeret og vi kan beregne

$$M_{ud} = (1 - 0,5\omega)\omega b d^2 f_{cd} = (1 - 0,5 \cdot 0,212) \cdot 0,212 \cdot 200 \cdot 360^2 \cdot 17,2 = 84,7 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 84,7 \text{ kNm}$$

Spørgsmål 2

$N = 120\ kN$, hvor N regnes positiv som tryk.

Vi antager igen at der er flydning, men ikke overrivning i trækarmering og opstiller ligevægten for at finde y

$$N_{ud} = b \cdot y \cdot f_{cd} - A_s f_{yd} = 120000 \Leftrightarrow y = \frac{N + A_s f_{yd}}{b \cdot f_{cd}} = \frac{120000 + 628 \cdot 416,7}{200 \cdot 17,2} = 111,0 mm$$

hvorefter vi bestemmer og kontrollerer træktøjningen

$$\varepsilon_s = \frac{d - x}{x} \varepsilon_{cu3} = \frac{360 - 111,0/0,8}{111,0/0,8} \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} = 5,6 \cdot 10^{-3} \begin{cases} > \varepsilon_{yd} = 2,083 \cdot 10^{-3} \\ < \varepsilon_{uk} = 50 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

Antagelsen om flydning og ingen overrivning var derfor korrekt.

Moment om centrum (altid en god ide, når N≠0, da man ellers skal have N's bidrag med):

$$\begin{aligned} M_{ud} &= A_s f_{yd} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) + 0,8 x b f_{cd} \left(\frac{h}{2} - 0,4x\right) \\ &= 628 \cdot 417(360 - 400/2) + 0,8 \cdot 138,7 \cdot 200 \cdot 17,2(400/2 - 0,4 \cdot 138,7) \\ &= 97,1 \cdot 10^6\ Nmm = 97,1 kNm \end{aligned}$$

Spørgsmål 3

N = 0 og montagearmering tages i regning, dvs. vi har to lag armering, hvor hvert enkelt kan være i flydning eller i det elastiske område. Vi løser problemet med iteration, dvs. vi gætter på x værdier indtil vores beregnede N svarer til den der er påført, hvorefter der kontrolleres for flydning og brudmomentet M_{ud} beregnes. Til kontrol indsætter vi i de ligninger, som vi også har anvendte under iterationen

$$x = 53,86mm \Rightarrow$$

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x}\varepsilon_{cu3} = \frac{360 \cdot 53,86}{53,86} 3,5 \cdot 10^{-3} = 19,89 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_s = \text{minimum}(f_{yd}, E_s \varepsilon_s) = \text{minimum}(417; 2 \cdot 10^5 \cdot 19,89 \cdot 10^{-3} = 3978,0) = 417MPa$$

$$\varepsilon_{sc} = \frac{x-d_{sc}}{x}\varepsilon_{cu3} = \frac{53,86-40}{53,86} 3,5 \cdot 10^{-3} = 0,90 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_{sc} = \text{minimum}(f_{yd}, E_s \varepsilon_{sc}) = \text{minimum}(417; 2 \cdot 10^5 \cdot 0,90 \cdot 10^{-3} = 180,0) = 180,0MPa$$

$$N = 0,8xbf_{cd} + A_{sc}\sigma_{sc} - A_s\sigma_s = 0,8 \cdot 53,86 \cdot 200 \cdot 17,2 + 628 \cdot 180 - 628 \cdot 417 = -613N = 0,613kN \approx 0kN$$

$$M_{ud} = 0,8xbf_{cd}\left(\frac{h}{2} - 0,4x\right) + A_{sc}\sigma_{sc}\left(\frac{h}{2} - d_{sc}\right) + A_s\sigma_s\left(d - \frac{h}{2}\right)$$
$$= 0,8 \cdot 53,86 \cdot 200 \cdot 17,2 \cdot (400/2 - 0,4 \cdot 53,86) + 628 \cdot 180 \cdot (400/2 - 40)$$
$$+ 628 \cdot 417 \cdot (360 - 400/2) = 86,4 \cdot 10^6 Nmm = 86,4kNm$$

<u>Bemærkninger</u>

Ved bøjning er det normalt, at momentbæreevnen kun vokser ganske lidt ved at trykarmeringen tages med i regning. Ved eftervisning af bæreevnen er det en stor lettelse i beregningerne, når trykarmeringen ignoreres, det er på den sikre side og det reducerer normalt ikke bæreevnen ret meget. Det er altid på den sikre side at ignorere en del af armeringen.

Dette bekræftes af at momentbæreevnen i denne opgave kun vokser fra 84,2 kNm (spørgsmål 1) til 86,4 kNm ved at trykarmeringen tages i regning, dvs. ca 2 % forøgelse af bæreevnen.

Spørgsmål 4

Punkt A

Her er der trækflydning al armeringen og dermed er tværsnittet fuldt revnet.

$$N = -A_s f_{yd} - A_{sc} f_{yd} = -628 \cdot 416,7 - 628 \cdot 416,7 = 523,6 \cdot 10^3 N = 523,6 kN$$
$M = 0 kNm$ pga symmetri

Punkt B

Dette punkt er ren bøjning og er derfor allerede gennemregnet i spørgsmål 3, hvor vi fik

$$N = 0kN \quad M = 86,5kNm$$

Punkt C

Dette er defineret som

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu3} \; og \; \varepsilon_s = \varepsilon_{yd} \Rightarrow$$
$$\frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_s} \Rightarrow x = d \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_s} = 360 \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 2,083 \cdot 10^{-3}} = 225,7mm$$

Vi ved at trækspændingen i trækarmeringen er lig med flydestyrken, da tøjningen er præcist lig med flydetøjningen. Vi kan også bestemme tøjningen og derefter spændingen i trykarmeringen

$$\varepsilon_{sc} = \frac{\varepsilon_{cu3}}{x}(x - d_{sc}) = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{225,7}(225,7 - 40) = 2,880 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$
$$\sigma_{sc} = \min(E_s \varepsilon_{sc}; f_{yd}) = \min(2 \cdot 10^5 \cdot 2,880 \cdot 10^3; 416,7) = 416,7MPa$$

Herefter beregnes normalkraft og brudmoment som

$$N_{ud} = b \cdot 0,8x \cdot f_{cd} + A_{sc}\sigma_{sc} - A_s\sigma_s$$
$$= 200 \cdot 0,8 \cdot 225,7 \cdot 17,2 + 628 \cdot 416,7 - 628 \cdot 416,7 = 621,1 \cdot 10^3 N = 621,1kN$$
$$M_{ud} = b \cdot 0,8x \cdot f_{cd} \cdot (h/2 - 0,4x) + A_{sc}\sigma_{sc}(h/2 - d_{sc}) + A_s\sigma_s(d - h/2)$$
$$= 200 \cdot 0,8 \cdot 225,7 \cdot 17,2 \cdot (400/2 - 0,4 \cdot 225,7) + 628 \cdot 416,7 \cdot (400/2 - 40) - 628 \cdot 416,7 \cdot (360 - 400/2)$$
$$= 151,9 \cdot 10^6 Nm = 151,9kNm$$

Alternativt kan punktet beregnes ved at iterere efter $\varepsilon_s = \varepsilon_{yd}$ i vores iterationsmodel fra spørgsmål 3, hvorved man får resultaterne ovenfor (det er dog en lidt vanskelig iteration for Excel, så det kræver lidt manuel variation af x)

Punkt D

Dette er defineret som

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu3} \; og \; \varepsilon_s = 0 \Rightarrow$$
$$x = 360mm$$

Vi ved at trækspændingen i trækarmeringen er lig med nul, da tøjningen er præcist lig med nul. Vi kan også bestemme tøjningen og derefter spændingen i trykarmeringen

$$\varepsilon_{sc} = \frac{\varepsilon_{cu3}}{x}(x - d_{sc}) = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{360}(360 - 40) = 3,111 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$
$$\sigma_{sc} = \min(E_s \varepsilon_{sc}; f_{yd}) = \min(2 \cdot 10^5 \cdot 3,111 \cdot 10^{-3}; 416,7) = 416,7MPa$$

Herefter beregnes normalkraft og brudmoment som

$$N_{ud} = b \cdot 0,8x \cdot f_{cd} + A_{sc}\sigma_{sc} - A_s\sigma_s = 200 \cdot 0,8 \cdot 360 \cdot 17,2 + 628 \cdot 416,7 - 628 \cdot 0$$
$$= 1252,4 \cdot 10^3 N = 1252,4kN$$
$$M_{ud} = 200 \cdot 0,8 \cdot 360 \cdot 17,2 \cdot (400/2 - 360/2 + 628 \cdot 416,7 \cdot (400/2 - 40)$$
$$-628 \cdot 0 \cdot (360 - 400/2) = 97,4 \cdot 10^6 Nm = 97,4kNm$$

Alternativt kan punktet beregnes ved at indsætte $x = d = 360mm$ i vores iterationsmodel hvorved man får resultaterne ovenfor.

Punkt E

I dette punkt er der en jævn tryktøjning over tværsnittet med

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sc} = \varepsilon_c = \varepsilon_{c3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ iflg tabel 4.2}$$

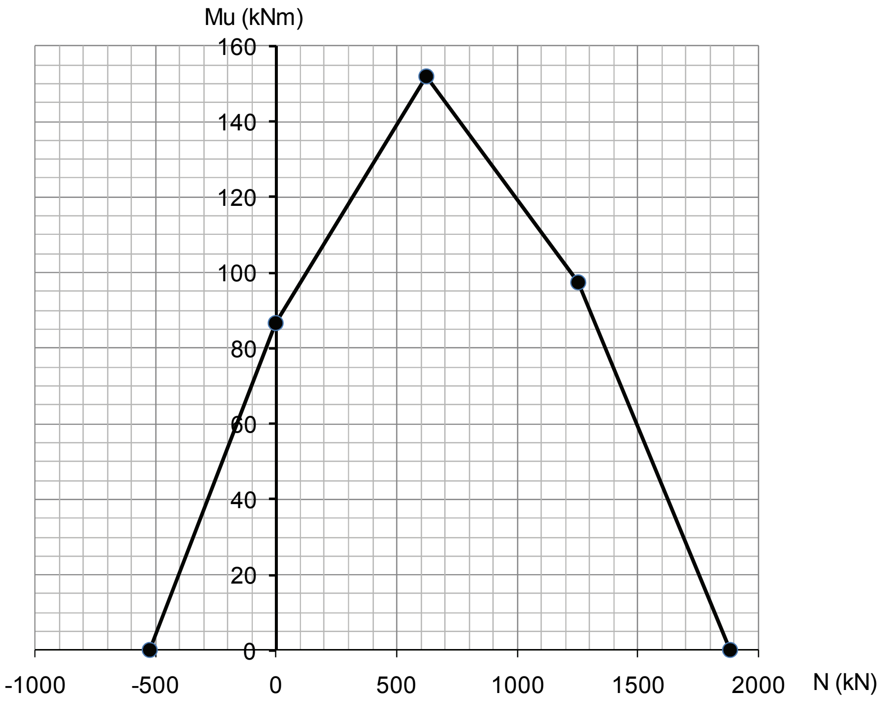
Vi kan nu beregne armeringsspændingerne som

$$\sigma_{sc} = \sigma_s = \min(E_s \varepsilon_s; f_{yd}) = \min(2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}; 416,7) = 400MPa$$

og finder derefter brudnormalkraft og brudmoment til

$$N_{ud} = b \cdot h \cdot f_{cd} + A_{sc}\sigma_{sc} + A_s\sigma_s = 200 \cdot 400 \cdot 17,2 + 628 \cdot 400 + 628 \cdot 400 = 1878,4 \cdot 10^3 N = 1878,4kN$$
$$M_{ud} = 0kNm \text{ da der er symmetri}$$

Vi kan nu optegne M-N diagrammet (fx med Excel) som

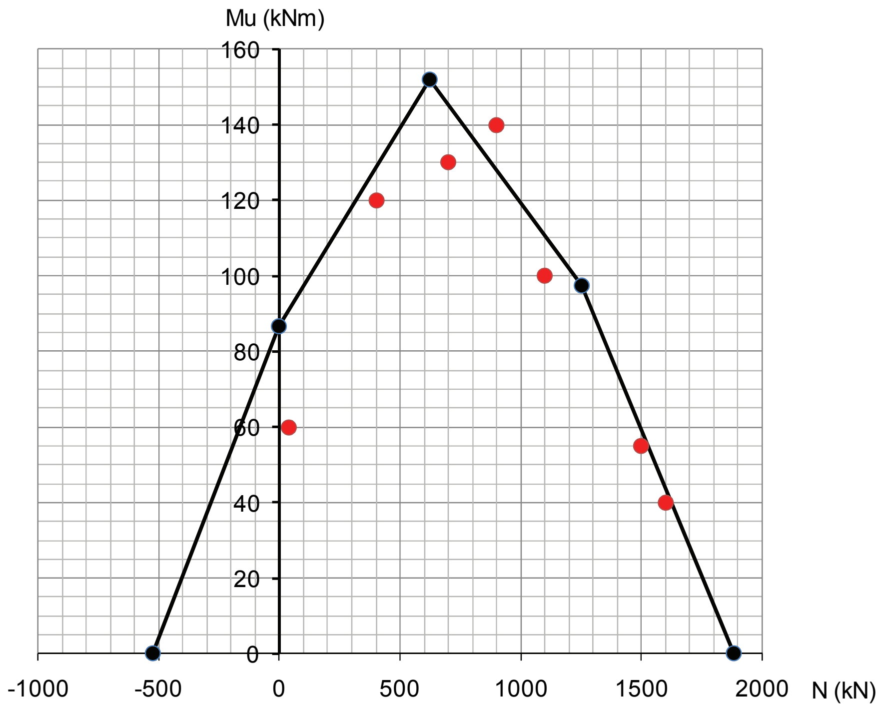


Bemærkning:

Ved opstilling af M-N diagrammet undgår man helt iteration – med undtagelse af punkt B, som vil kræve iteration, dersom man ønsker at tage trykarmeringen i regning (men den bidrog her kun med 2 % til momentbæreevnen)

Spørgsmål 5

Den nemmeste måde at checke de mange kombinationer af M og N er at indtegne dem i M-N diagrammet.



Vi ser at de flester af punkterne ligger indenfor diagrammets omkreds, og dermed kan tværsnittet bære alle disse kombinationer.

Der er dog en kombination, som ligger udenfor og dermed kan tværsnittet ikke bære denne kombination af moment og normalkraft iflg vores M-N diagram..

Bemærkning

Opstilling af et M-N diagram er en meget effektiv måde at eftervise bærevnen, dersom tværsnittet skal bære en lang række belastningskombinationer. Er der derimod kun tale om en eller to kombninationer, så er det normalt ikke en effektiv strategi.

Opgave B11-06 - Besvarelse

Spørgsmål 1:

Bjælken belastet med linielast p = 15 kN/m og to enkeltkræfter P = 30 kN med spændvidde L = 8,0 m. Største moment er derfor

$$M_{\max} = \frac{1}{8} \cdot 15 \cdot 8{,}0^2 + 30 \cdot 3{,}0 = \underline{\underline{210\ kNm}}$$

Beton:

$$f_{ck} = 30\ MPa \quad , \quad \gamma_c = 1{,}45 \quad \Rightarrow \quad f_{cd} = 20{,}7\ MPa$$

Armering:

Ribbestål $f_{yk} = 500\ MPa \quad , \quad \gamma_s = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad f_{yd} = 417\ MPa$,

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = 0{,}21\% \qquad \varepsilon_{uk} = 5\% \text{ for klasse B stål [Tabel 1.3]}$$

Bøjler $f_{ywk} = 410\ MPa \quad , \quad \gamma_s = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad f_{ywd} = 342\ MPa$

Hovedarmeringsareal A_s

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} + A_{s3} = 4\pi(16/2)^2 + 2\pi(12/2)^2 + 2\pi(12/2)^2 = 804 + 226 + 226 = 1256\ mm^2$$

I et normaltarmeret tværsnit er armeringen i flydning og vi kan opstille ligevægt og finde trykzonens højde x ud fra

$$N = A_{cp} f_{cd} - A_s f_{yd} \Leftrightarrow A_{cp} = \frac{N + A_s f_{yd}}{f_{cd}} = \frac{0 + 1256 \cdot 417}{20{,}7} = 25{,}30 \cdot 10^3 mm^2$$

$$A_{cp} = 0{,}8x \cdot b_w \Leftrightarrow x = \frac{A_{cp}}{0{,}8 b_w} = \frac{25{,}30 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 250} = 126{,}5mm$$

Vi beregner nu tøjningerne i de to lag trækarmering som

$$\varepsilon_{s,top} = \frac{d_{top} - x}{x} \varepsilon_{cu3} = \frac{430 - 126{,}5}{126{,}5} \cdot 3{,}5 o/oo = 0{,}84\%$$

$$\varepsilon_{s,bund} = \frac{d_{bund} - x}{x} \varepsilon_{cu3} = \frac{510 - 126{,}5}{126{,}5} \cdot 3{,}5 o/oo = 1{,}06\%$$

Da begge lags ε_s ligger imellem $\varepsilon_{yd} = 0{,}21\%$ og $\varepsilon_{uk} = 5\%$ er tværsnittet normaltarmeret.

Trækarmeringen fælles effektiv højde beregnes som

$$d = \frac{A_{s1}d_1 + A_{s2}d_2 + A_{s3}d_3}{A_s} = \frac{226 \cdot 430 + 804 \cdot 510 + 226 \cdot 510}{1256} = 495\ mm$$

Vi beregner nu brudmomentet som

$$M_{ud} = A_s f_{yd}(d - 0{,}4x) = 1256 \cdot 417(495 - 0{,}4 \cdot 126{,}5) = \underline{\underline{233\ kNm}}$$

Da M_{ud}=233 kNm > M_{max} =210 kNm så er hovedarmeringen tilstrækkelig til at bære momentet.

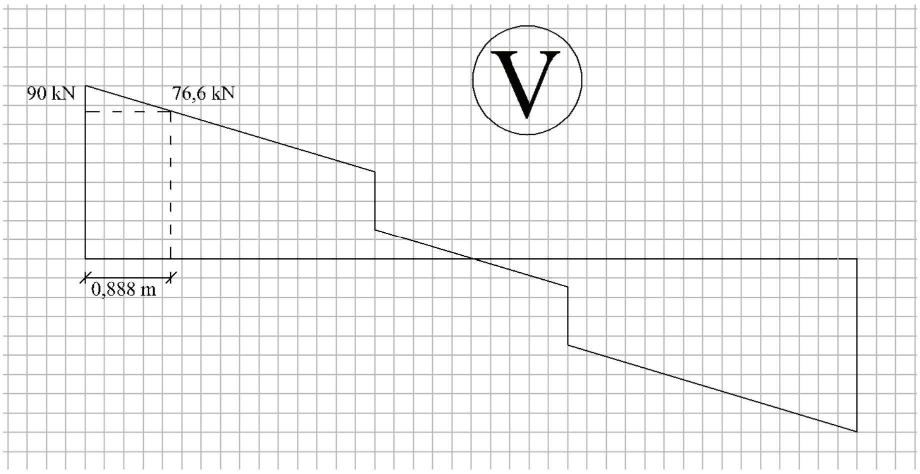
Spørgsmål 2:

Understøtningsreaktion $R_{AL} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8{,}0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 = 90\ kN$

cotθ = 2,0

z = d – 0,4·x = d·(1 – 0,5·ω) = 495 (1 – 0,5·0,205) = 444 mm

z · cotθ = 444 ·2,0 = 888 mm



Dimensionerende V_{sd} for bøjlerne 90-0,888·15 = 76,6 kN

Bæreevnekrav til bøjleafstand [5.29+5.28]

$$s \le \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{\tau_{Ed} b_w} \cdot \cot\theta = \frac{A_{sw}}{V_{sd}} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot \cot\theta = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5^2}{76{,}6 \cdot 10^3} \cdot 444 \cdot 342 \cdot 2{,}0 = 622\ mm$$

Minimumskrav til bøjleafstand

0,75·d = 0,75·495 = 371 mm

$$\frac{15{,}9 \cdot A_{sw} \cdot f_{ywk}}{b_w \cdot \sqrt{f_{ck}}} = \frac{15{,}9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 410}{250 \cdot \sqrt{30}} = 748\ mm$$

Bøjleafstanden vælges til 350 mm.

Bemærk: Vi vælger de 350 mm, da et mål som fx 371 mm ville være for skævt til brug på en byggeplads, hvor vi selv skal kontrollere armeringsplacering.
Skulle vi have kontrolleret forskydningsstyrken, så skulle vi naturligvis også have undersøgt om der skete knusning i trykstringerne iflg. [5.23], men spørgsmålet drejede sig kun om at undersøge bøjleafstanden.

Spørgsmål 3:

Trækkraft i armeringen fra momentet ved understøtningen = 0.

Ekstrakraft hidrørende fra "skrårevneeffekten"

$$\frac{1}{2}\cdot V_{sd}(I)\cdot\cot\theta = \frac{1}{2}\cdot 90\cdot 2{,}0 = \underline{\underline{90\ \mathrm{kN}}} \qquad [5.15]$$

Denne kraft bør regnes optaget af de 4ø16, der "ligger i kroppen" (hvor de øvrige kræfter vedr. forskydningskraftoptagelsen virker). Dette skyldes at den skrå trykstringer går fra trykzonen ned igennem den smalle krop og derfor rammer de 4 jern, der ligger lige under kroppen.

Spørgsmål 4:

Forankring af ø16 kamstål kræver en forankringslængde l_b for at kunne opnå udnyttelse af flydestyrke. Denne beregnes iflg tabel 3.1 som

$$l_b = 39Ø \qquad [\text{Tabel } 3.1]$$

Spændingen i armeringen er dog ikke oppe på flydespændingen, men kun oppe på

$$\sigma_{sd} = \frac{V_{sd}}{4ø16} = \frac{90\cdot 10^3}{804} = 112\ MPa$$

Den nødvendige forankringslængde er derfor

$$\ell_{nødv} = \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}}\cdot 39ø = \frac{112}{417}39\cdot 16 = \underline{\underline{161\ mm}} < \underline{\underline{200\ mm}} \qquad ok$$

Betonkonstruktioner
Januar 2012

Opgave B11-07 - Besvarelse

Materialeparametre

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{35\,MPa}{1,45} = 24,2\,MPa, \qquad \varepsilon_{cu3} = 3,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\nu_v = 0,7 - \frac{f_{ck}}{200\,MPa} = 0,525 \quad , \qquad \nu_t = 0,7 \cdot \nu_v = 0,37$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{550\,MPa}{1,20} = 458\,MPa, \quad \varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{458}{2 \cdot 10^5} = 2,29 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_{uk} = 5 \cdot 10^{-2}$$

Spørgsmål 1:

V og T varierer lineært langs bjælken,
M varierer parabolsk langs bjælken.
Alle snitlaster er numerisk størst ved indspændingen.

$$g = (0,7 \cdot 0,12 + 0,3 \cdot 0,38)\,m^2 \cdot 24\,kN/m^3 = 4,8\,kN/m$$

$$V_{Ed} = (g + \gamma_p p_k) \cdot \ell = (4,8 + 1,5 \cdot 15)\,kN/m \cdot 4,2\,m = \underline{114,7\,kN}$$

$$T_{Ed} = \gamma_p p_k \cdot \ell \cdot e = 1,5 \cdot 15\,kN/m \cdot 4,2\,m \cdot 0,25\,m = \underline{23,6\,kNm}$$

$$M_{Ed} = -0,5 \cdot (g + \gamma_p p_k) \cdot \ell^2 = -0,5 \cdot (4,8 + 1,5 \cdot 15)\,kN/m \cdot (4,2\,m)^2 = -\underline{240,8\,kNm}$$

Spørgsmål 2:

Vi bestemmer effektiv tykkelse, areal og omkreds inden for regningsmæssig midtlinie :

$$t_{ef} = \max \begin{cases} \dfrac{A}{u} = \dfrac{300 \times 500}{2 \times (300+500)} mm = \underline{94\, mm} \\ 2 \times (c + \O_t + \dfrac{1}{2}\O) = 2 \times (20+12+12,5)\, mm = 89\, mm \end{cases}$$

$$A_k = (b_w - t_{ef})(h - t_{ef}) = 206 \times 406\, mm^2$$

$$u_k = 2 \cdot (b_w + h - 2 \cdot t_{ef}) = 2 \cdot (300 + 500 - 2 \cdot 94)\, mm = 1224\, mm$$

Bøjler:

$$T_{Rd,w} = 2A_k \frac{A_{sw}}{s} f_{yd} \cot\theta = 2 \cdot 83600 \frac{\pi(12/2)^2}{120} \cdot 458 \cdot 2 = \underline{144,3\, kNm}$$

Skrå trykstringere:

$$T_{Rd,c} = 2 \cdot A_k \cdot \nu_t \cdot f_{cd} t_{ef} \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = 2 \cdot 83600 \cdot 0.37 \cdot 24,1 \cdot 94 \cdot \frac{2}{1+2^2} = \underline{56,1\, kNm}$$

Langsgående armering:

$$T_{Rd,l} = A_{sl} f_{yd} \frac{2A_k}{u_k \cot\theta} = 8\pi(25/2)^2 458 \frac{2 \cdot 83600}{1224 \cdot 2} = \underline{122,8 kNm}$$

Samlet udnyttelse overfor vridning

$$T_{Rd} = \min(T_{Rd,w}; T_{Rd,c}; T_{Rd,l}) = \min(144,3; 56,1; 268,2) = \underline{56,1 kNm} > T_{Ed} = 23,6 kNm \quad \text{OK}$$

Spørgsmål 3:

Vi antager, 1) at tværsnittet er normaltarmeret og 2) at den plastiske trykzone er placeret helt i flangen og ikke når ned i bjælkekroppen. Vi beregner

$$d = h - c - \O_t - \frac{1}{2}\O = (500 - 20 - 12 - 12,5)\,mm = 455\,mm$$

$$y = \frac{A_s f_{yd}}{b \cdot \eta \cdot f_{cd}} = \frac{4\pi(25/2)^2 \cdot 457}{700 \cdot 1 \cdot 24,2} = 52,97mm < h_f = 120mm \quad OK! \Rightarrow$$

$$x = y/\lambda = 52,97/0,8 = 66,2mm \Rightarrow$$

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{d}\varepsilon_{cu3} = \frac{455-66,2}{66,2}3,5 \cdot 10^{-3} = 20,56 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{yd} = 2,29 \cdot 10^{-3} \le \varepsilon_s = 20,56 \cdot 10^{-3} \le \varepsilon_{uk} = 50 \cdot 10^{-3} \qquad \text{OK!}$$

$$M_{Rd} = A_s f_{yd} \cdot z = A_s f_{yd} \cdot (d - y/2)$$

$$= 4\pi(25/2)^2 \cdot 457 \cdot (455 - 52,97/2) = 384,5kNm > M_{Ed} = 240,8kN \quad OK!$$

Vi har nu eftervist de to antagelser og eftervist at momentbæreevnen er tilstrækkelig.

<u>Alternativt</u> kan vi beregne et tværsnit, med rektangulær trykzone og et lag trækarmering udsat for ren bøjning efter ω-metoden

$$\omega_{und} = \lambda \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{uk}} \le 0,8 \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 50 \cdot 10^{-3}} = 0,0523$$

$$\omega_{bal} = \lambda \cdot \frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{yd}} = 0,8 \cdot \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 2,29 \cdot 10^{-3}} = 0,484$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b_f d \eta f_{cd}} = \frac{4\pi(25/2)^2 458}{700 \cdot 455 \cdot 1 \cdot 24,2} = 0,1164$$

Da $\omega_{und} < \omega < \omega_{bal}$ er tværsnittet normalarmeret og vi kan beregne

$$\mu = \omega(1 - ½\omega) = 0.1164(1 - ½ \cdot 0,1164) = 0.1096$$

$$M_{Rd} = \mu b_f d^2 \eta f_{cd} = 0,1096 \cdot 700 \cdot 455^2 \cdot 24,2 = 384,5kNm > M_{Ed} = 240,8kNm$$

Spørgsmål 4:

Til brug ved forskydningseftervisningen beregner vi den indre momentarm z

$$z = d - ½y = 455 - ½ \cdot 52,97 = 428,5mm$$

Bøjler

$$A_{sw} = 2 \cdot \frac{\pi}{4}(12\,mm)^2 = 226\,mm^2$$

$$V_{Rd,w} = \frac{A_{sw}}{s} z \cdot f_{yd} \cot\theta = \frac{226}{120} \cdot 428,5 \cdot 458 \cdot 2 = 739,2kN$$

Kontrol af bøjlearmeringens minimumskrav for at kunne regne forskydningsarmeret

$$s = 120mm \leq \begin{cases} 0,75 \cdot d = 0,75 \cdot 455\,mm = 341\,mm \\ 15,9 \dfrac{A_{sw}}{b_w} \dfrac{f_{yk}}{\sqrt{f_{ck}}} = 15,9 \dfrac{226}{300} \dfrac{458}{\sqrt{24.1}} = 1114\,mm \end{cases} \quad \text{OK}$$

Skrå trykstringer

$$V_{Rd,c} = \upsilon_v f_{cd} b_w z \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = 0.525 \cdot 24,2 \cdot 300 \cdot 428,5 \frac{2}{1+2^2} = 653,3kN$$

Langsgående armering

Pga. forskydningskraften kommer der en ekstra trækkraft i armeringen i træksiden :

$$V_{Rd,l} = \frac{2 f_{yd} A_s}{\cot\theta} = \frac{2 \cdot 458 \cdot 4\pi(25/2)^2}{2} = 899,3kN$$

Samlet udnyttelse overfor forskydning

$$V_{Rd} = \min(V_{Rd,w}; V_{rd,c}; V_{Rd,l}) \min(739,2; 653,3; 899,3) = 653,3kNm > V_{Ed} = 114,7kNm \quad \text{OK}$$

Spørgsmål 5:

Den simpleste: Vi starter med den simpleste og mest konservative kontrol, nemlig

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd}}+\frac{M_{Ed}}{M_{Rd}}+\frac{V_{Ed}}{V_{Rd}}=\frac{23,6}{56,1}+\frac{240,8}{384,47}+\frac{114,7}{653,3}=0,422+0,626+0,176=1,224>1 \quad \text{DUER IKKE}$$

Den mere detaljerede: Dette betyder dog ikke at bjælken ikke kan bære, vi har bare ikke bevist at den kan bære. Vi vælger derfor at se mere detaljeret på bjælken og kontrollere de skrå trykstringere, bøjlerne og den langsgående armering hver for sig.

Bøjler:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,W}}+\frac{V_{Ed}}{V_{Rd,W}}=\frac{23,6}{144,3}+\frac{114,7}{739,2}=0,164+0,155=0,319\leq 1 \qquad \text{OK}$$

Skrå trykstringere:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,c}}+\frac{V_{Ed}}{V_{Rd,C}}=\frac{23,6}{56,1}+\frac{114,7}{653,3}=0,422+0,176=0,598\leq 1 \qquad \text{OK}$$

Langsgående armering:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,l}}+\frac{M_{Ed}}{M_{Rd}}+\frac{V_{Ed}}{V_{Rd,l}}=\frac{23,6}{122,8}+\frac{240,8}{384,47}+\frac{114,7}{899,3}=0.193+0.626+0.128=0.947\leq 1 \quad \text{OK}$$

Med denne detaljerede beregning har vi vist at den udkragede bjælke kan holde til belastningen, når vi checker hhv. bøjler, trykstringere og langsgående armering hver for sig.

Bemærkninger

Det skal bemærkes at den mere detaljerede beregningsmodel faktisk giver os en højere bæreevne end den simple (1,224/0,947=1,29, dvs 29 % højere bæreevne)

Opgave B11-08 - Besvarelse

Bestemmelse af materialeparametre

f_{yk} = 500 MPa ⇒ f_{yd} = 500/1,2 = 417 MPa => $\varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_s = 417/(2\cdot10^5) = 2{,}085\cdot10^{-3}$

f_{ck} = 35 MPa ⇒ f_{cd} =35/1,45 = 24,1 Mpa og $\varepsilon_{cu3} = 3{,}5\cdot10^{-3}$

g = 0,3·0,4·24 = 2,88 kN/m

p = g·1,0 + q_k·1,3 = 2,88·1,0 + 20·1,3 = 28,83 kN/m

Spørgsmål 1:

Vi beregner det maksimale moment som

$$M_{Ed} = \frac{1}{8}\cdot 28{,}83\cdot 8^2 = 230{,}6kNm$$

Vi antager, at tværsnittet er normaltarmeret og vi beregner

$$d = 400-35-8-20/2 = 347\,mm$$

$$y = \frac{A_s f_{yd}}{b\cdot\eta\cdot f_{cd}} = \frac{5\pi(20/2)^2\cdot 417}{300\cdot 1\cdot 24{,}1} = 90{,}6mm \Rightarrow$$

$$x = y/\lambda = 90{,}6/0{,}8 = 113{,}2mm \Rightarrow$$

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{d}\varepsilon_{cu3} = \frac{347-113{,}2}{113{,}2}3{,}5\cdot 10^{-3} = 7{,}227\cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{yd} = 2{,}085\cdot 10^{-3} \le \varepsilon_s = 7{,}227\cdot 10^{-3} \le \varepsilon_{uk} = 50\cdot 10^{-3} \qquad \text{OK!}$$

$$M_{Rd} = A_s f_{yd}\cdot z = A_s f_{yd}\cdot(d - y/2)$$

$$= 5\pi(20/2)^2\cdot 417\cdot(347-90{,}6/2) = 197{,}6kNm < M_{Ed} = 230{,}6kN \quad \mathit{IKKE\ OK}!$$

Vi har nu eftervist de to antagelser og vist at momentbæreevnen ikke er tilstrækkelig.

Alternativt kan vi beregne et tværsnit, med rektangulær trykzone og et lag trækarmering udsat for ren bøjning efter ω-metoden

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \frac{5\pi\left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot 417}{300 \cdot 347 \cdot 24,1} = 0,261$$

$$\omega_{bal} = \frac{\lambda \varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{yd}} = \frac{0,8 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 2,085 \cdot 10^{-3}} = 0,501 \qquad (4.101)$$

$$\omega_{und} = \frac{\lambda \varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{uk}} = \frac{0,8 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + 5,0 \cdot 10^{-2}} = 0,052 \qquad (4.113)$$

Da $\omega_{und} < \omega < \omega_{bal}$ er tværsnittet normalarmeret og vi kan beregne

$$M_{Rd} = \omega(1 - 0,5\omega) b d^2 f_{cd} =>$$

$$M_{Rd} = 0,261\left(1 - 0,5 \cdot 0,261\right) \cdot 300 \cdot 347^2 \cdot 24,1 = 197,8 \cdot 10^6 \ Nmm \ = 197,8 \ kNm$$

Spørgsmål 2:

Brudmomentet M'_{Rd} ved negativ bøjning (træk i oversiden) beregnes som i spørgsmål 1 – blot er trækarmeringen nu 2 ϕ20, så

$$y = \frac{A_s f_{yd}}{b \cdot \eta \cdot f_{cd}} = \frac{2\pi(20/2)^2 \cdot 417}{300 \cdot 1 \cdot 24,1} = 36,2mm \Rightarrow$$

$$x = y/\lambda = 36,2/0,8 = 45,3mm \Rightarrow$$

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{d}\varepsilon_{cu3} = \frac{347-45,3}{45,3} 3,5 \cdot 10^{-3} = 23,31 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{yd} = 2,085 \cdot 10^{-3} \le \varepsilon_s = 23,31 \cdot 10^{-3} \le \varepsilon_{uk} = 50 \cdot 10^{-3} \qquad \text{OK!}$$

$$M'_{Rd} = A_s f_{yd} \cdot z = A_s f_{yd} \cdot (d - y/2)$$
$$= 2\pi(20/2)^2 \cdot 417 \cdot (347 - 36,2/2) = 86,2kNm$$

Alternativt kan vi beregne et tværsnit, med rektangulær trykzone og et lag trækarmering udsat for ren bøjning efter ω-metoden

$$\omega = \frac{2\pi\left(20/2\right)^2 \cdot 417}{300 \cdot 347 \cdot 24,2} = 0,104 \Leftrightarrow \omega_{und} < \omega < \omega_{bal} \quad OK! =>$$

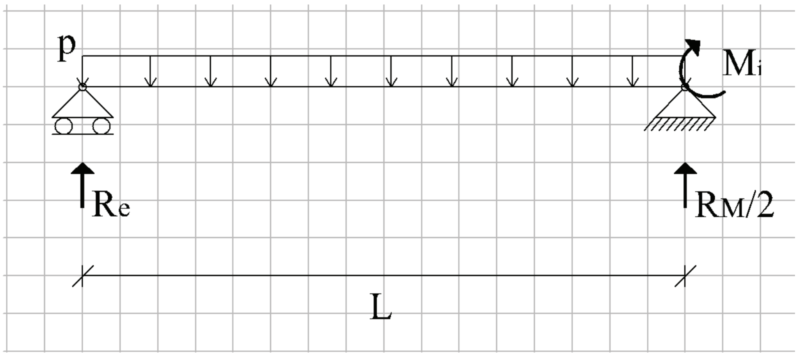
$$M'_{Rd} = 0,104\left(1 - 0,5 \cdot 0,104\right) \cdot 300 \cdot 347^2 \cdot 24,1 = 86,2 \cdot 10^6 \ Nmm = 86,2 \ kNm$$

Spørgsmål 3:

Da bæreevnen ønskes eftervist, dvs. det skal vises at bæreevnen er tilstrækkelig, så er det nemmeste at antage et indspændingsmoment $M_i < M'_{Rd}$ og så beregne momentfordelingen. (Derefter skal vi lige checke bøjningsmomentets maksimale værdi og indspændingsmomentet).

Da $M'_{Rd} = 86,2\ kNm$, så kan vi vælge et lavere $M_i = 85$ kNm (så bjælken udnyttes meget over understøtningen og dermed reducerer momentet på midten mest muligt, men stadig kan holde over understøtningen) og herefter beregne momentkurven og reaktionerne.

De to bjælker er symmetriske og vi ser derfor kun på den venstre bjælke (og der kommer derfor også $R_M/2$ fra højre bjælkedel):



Ligevægt giver reaktionerne

$$R_e = \frac{1}{2} pL - M_i / L$$

$$R_M / 2 = \frac{1}{2} pL + M_i / L$$

Momentet M(x) beregnes som

$$M(x) = \frac{1}{2} p\, x\, (L - x) - (x / L) M_i$$

Indsætter vi nu p = 28,83 kN/m, L = 8 m og M_i = 85 kNm, så finder vi maksimalmomentet ved

$$\frac{\partial M}{\sigma x} = 0 \text{ ved } M_{max} \Leftrightarrow x / L = \frac{1}{2} - \frac{M_i}{p \cdot L^2} = \frac{1}{2} - \frac{85}{28{,}83 \cdot 8^2} = 0{,}454$$

og dermed

$$M_{max} = M(x / L = 0{,}454) = ½ \cdot 28{,}83 \cdot 0{,}454 \cdot 8 \cdot (1 - 0{,}454) \cdot 8 - 0{,}454 \cdot 85 = 190{,}0 kNm < M_d = 197{,}8 kNm$$

<u>Bemærk</u>: Det vil oftest være tilstrækkeligt godt at beregne momentet på midten af spændet, dvs. i x/L=½, hvor M(x/L=½) kan beregnes til 188,1kNm

Vi har nu vist at

$$M_{max} < M_{Rd} \text{ og } M_i < M'_{Rd}$$

Da indspændingsgraden er

$$M_i / M_{max} = 85 / 190 = 0{,}447$$

og da tværsnittet er normal armeret (både ved positiv og ved negativ bøjning), så skal vi bare kontrollere at grænserne for indspændingsgraden er opfyldte

$$1/3 < M_i / M_{max} = 0{,}447 < 2$$

Det ses således, at bjælken kan bære den aktuelle last og at vores indspændingsmoment ligger indenfor grænserne.

Reaktionerne beregnes som

$$R_e = \frac{1}{2} \cdot 28{,}83 \cdot 8 - 85 / 8 = 104{,}7 \text{ kN}$$

$$R_m = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 28{,}83 \cdot 8 + 85 / 8 \right) = 251{,}9 \text{ kN}$$

Spørgsmål 4:

Belastningen p beregnes til

$$p = g \cdot 1{,}0 + q_k \cdot 0{,}75 = 2{,}88 \cdot 1{,}0 + 20 \cdot 0{,}75 = 17{,}88 \text{ kNm}$$

Teknisk Ståbi angiver nedbøjningen på midten som

$$W_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{p \cdot L^4}{E\,I}$$

Ved beregning af EI anvender vi standardmetoden med at regne det statiske moment om nul-linien, placeret x under tværsnittets top, og bestemme x ved at sætte S_t=0, hvorefter inertimo-mentet kan beregnes.

α = 7,7 (fra Tabel 4.1 for f_{ck} = 35 MPa)

$$S_t = b \cdot x \cdot (-x/2) + \alpha A_s (d - x) = 300 \cdot x \cdot (-x/2) + 7{,}7 \cdot 5\pi (20/2)^2 (347 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 131{,}7mm$$

$$I_t = \frac{1}{12} bx^3 + bx \cdot (x/2)^2 + \alpha A_s (d - x)^2$$

$$= \frac{1}{12} 300 \cdot 131{,}7^3 + 300 \cdot 131{,}7 \cdot (131{,}7/2)^2 + 7{,}7 \cdot 5\pi (20/2)^2 (347 - 131{,}7)^2 = 7{,}89 \cdot 10^8 mm^4 \Rightarrow$$

$$EI = E_c I_t = \frac{E_s}{\alpha} I_t = \frac{2 \cdot 10^5}{7{,}7} \cdot 7{,}89 \cdot 10^8 = 20{,}51 \cdot 10^{12}\, Nmm^2 \Rightarrow$$

$$W_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{17{,}88 \cdot 4000^4}{20{,}51 \cdot 10^{12}} = 46{,}5\ mm$$

<u>Alternativt</u> kan vi beregne stivheden af et tværsnit, med rektangulær trykzone og et lag træk-armering udsat for ren bøjning efter $\alpha\rho$-metoden

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} = \frac{5\pi (20/2)^2}{300 \cdot 347} = 0{,}0151$$

$$\alpha\rho = 7{,}7 \cdot 0{,}0151 = 0{,}1163$$

$$\beta = \alpha\,\rho \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha\rho} + 1} - 1 \right) = 0{,}1163 \left(\sqrt{\frac{2}{0{,}1163} + 1} - 1 \right) = 0{,}3798$$

$$\varphi_b = \frac{1}{6} \beta (3 - \beta) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}3798 (3 - 0{,}3798) = 0{,}1659$$

$$EI = E_c \cdot \varphi_b \cdot \beta \cdot b \cdot d^3 = \left(\frac{2{,}0 \cdot 10^5}{7{,}7} \right) \cdot 0{,}1659 \cdot 0{,}3798 \cdot 300 \cdot 347^3 = 20{,}51 \cdot 10^{12}\ Nmm^2$$

Spørgsmål 5:

Vi beregner EI, dvs bøjningsstivheden overfor et negativt moment med træk i oversiden. Dette gøres præcist, som i foregående spørgsmål, blot kun med 2 armeringsstænger i stedet for 5, dvs.

$$S_t = b \cdot x \cdot (-x/2) + \alpha A_s (d-x) = 300 \cdot x \cdot (-x/2) + 7{,}7 \cdot 2\pi(20/2)^2(347-x) = 0 \Leftrightarrow x = 90{,}89mm$$

$$I_t = \frac{1}{12}bx^3 + bx \cdot (x/2)^2 + \alpha A_s (d-x)^2$$

$$= \frac{1}{12}300 \cdot 90{,}89^3 + 300 \cdot 90{,}89 \cdot (90{,}89/2)^2 + 7{,}7 \cdot 2\pi(20/2)^2(347-90{,}89)^2 = 3{,}92 \cdot 10^8 mm^4 \Rightarrow$$

$$EI = E_c I_t = \frac{E_s}{\alpha} I_t = \frac{2 \cdot 10^5}{7{,}7} \cdot 3{,}92 \cdot 10^8 = 10{,}19 \cdot 10^{12} Nmm^2$$

Vi beregner nu nedbøjningerne

$$u_1 = \frac{5}{384}\frac{17{,}88.(0{,}916 \cdot 8000)^4}{2{,}0508 \cdot 10^{13}} = 32{,}8mm$$

$$u_2 = \frac{1}{8}\frac{17{,}88 \cdot (0{,}084 \cdot 8000)^4}{1{,}0193 \cdot 10^{13}} + \frac{1}{3}\frac{½ \cdot 17{,}88 \cdot (0{,}916 \cdot 8000) \cdot (0{,}084 \cdot 8000)^3}{1{,}0193 \cdot 10^{13}} = 0{,}8mm \Rightarrow$$

$$u_{\max} = 32{,}8 + ½ \cdot 0{,}8 = 33{,}2mm < L/200 = 40mm$$

og ser at nedbøjningen nu er under det krævede.

Alternativt kunne vi anvende αρ-metoden

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} = \frac{2\pi(20/2)^2}{300 \cdot 347} = 0{,}00603 \Rightarrow \alpha\rho = 7{,}7 \cdot 0{,}00603 = 0{,}04645$$

$$\beta = 0{,}04645\left(\sqrt{\frac{2}{0{,}04645}+1}-1\right) = 0{,}2619$$

$$\varphi_b = \frac{1}{6}\beta(3-\beta) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}2619(3-0{,}2619) = 0{,}1195$$

$$EI = E_c \cdot \varphi_b \cdot \beta \cdot b \cdot d^3 = \left(\frac{2{,}0 \cdot 10^5}{7{,}7}\right) \cdot 0{,}1195 \cdot 0{,}2619 \cdot 300 \cdot 347^3 = 10{,}19 \cdot 10^{12} \ Nmm^2$$

Bemærkninger

Det ses at effekten af indspændingen har reduceret nedbøjningen med ca. 30 %, svarende til at bjælken er blevet ca. 40 % stivere uden at vi har lagt ekstra armering i bjælken. Det skyldes reelt, at vi har inddraget de 2 langsgående armeringsstænger, som er anvendt i oversiden i stedet for at nøjes med de 5 stænger der ligger i undersiden.

Opgave B11-09 - Besvarelse

Spørgsmål 1:

Til beregning af bæreevne bruger vi formlerne

$$N_{crd} = A_c \sigma_{crd}$$
$$\sigma_{crd} = \frac{f_{cd}}{1 + \frac{f_{cd}}{\pi^2 E_{ocrd}} \lambda^2}$$

og beregner derfor

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,45} = \frac{30}{1,45} = 20,7 \text{ MPa}$$

$$E_{ocrd} = 0,75\ E_{od} = 0,75 \frac{E_{ok}}{1,45} = \frac{0,75}{1,45} 51000 \cdot \frac{30}{30+13} = 18404 \text{ MPa} < 1000 f_{cd} = 20700 \text{MPa}$$

$$\lambda = L_s / i = \sqrt{12} \frac{L_s}{b} = \sqrt{12} \frac{5000}{400} = \underline{43,3} < 90 \Rightarrow$$

$$\sigma_{crd} = \frac{f_{cd}}{1 + \frac{f_{cd}}{\pi^2 E_{ocrd}} \lambda^2} = \frac{20,74}{1 + \frac{20,7}{\pi^2 \cdot 18404} 43,4^2} = \underline{17,1 \text{ MPa}}$$

$$A_c = 400 \cdot 400 = 160000 \text{ mm}^2$$

Søjlens bæreevne fra beton alene er:

$$N_{crd} = A_c \sigma_{crd} = 160000 \cdot 17,1 = 2736,0 \text{ kN} < N_{Ed} = 3000 \text{ kN}$$

Dette er ikke tilstrækkeligt og det er derfor nødvendigt at regne søjlen armeret

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 500 / 1,20 = 417 MPa$$
$$A_{sc} = 4\pi (24/2)^2 = 1810\ mm^2$$
$$\rho = \frac{A_{sc}}{A_c} = \frac{1810}{160000} = 0,0113$$

Forholdet imellem armeringens stivhed og betonens stivhed (sekanthældningen igennem top-punktet på betonens arbejdskurve) benævnes α og kan beregnes eller slås op i tabel 7.1 til α=21.

Herefter beregnes bæreevnen inkl. armeringens bidrag som

$$N_{crd} \leq \begin{cases} A_c\sigma_{crd}(1+\alpha\rho) = 2736,0\cdot(1+21\cdot 0,0113) & = 3385\text{ kN} \\ A_c\sigma_{crd} + A_{sc}f_{yd} = 2736,0+1,810\cdot 417 & = 3491\text{ kN} \\ A_c\sigma_{crd}(1+0,04\alpha) = 2736,0\cdot(1+0,04\cdot 21) & = 5034\text{ kN} \end{cases}$$

Søjlen kan således bære 3385 kN, dvs. bæreevnen ligger over belastningen på $\underline{N_{Ed} = 3000\text{ kN}}$

Spørgsmål 2:

Beregningerne minder meget om beregninger i spørgsmål 1, idet den eneste forskel er en ændring af søjlelængden, som nu ændres til

$$L_s = 2L = 2\cdot 5000 = 10000\text{ mm} \Rightarrow$$

$$\lambda = \sqrt{12}\,\frac{10000}{400} = \underline{86,6 < 90} \Rightarrow$$

$$\sigma_{crd} = \frac{f_{cd}}{1+\dfrac{f_{cd}}{\pi^2 E_{ocrd}}\lambda^2} = \frac{20,7}{1+\dfrac{20,7}{\pi^2\cdot 18404}86,6^2} = \underline{11,2\text{ MPa}} \Rightarrow$$

$$N_{crd} = 160000\cdot 11,2 = 1792,0\text{kN} \quad \text{(uden armeringsbidrag)}$$

$$N_{crd} \leq \begin{cases} A_c\sigma_{crd}(1+\alpha\rho) = 1792,0\cdot(1+21\cdot 0,0113) & = 2217\text{ kN} \\ A_c\sigma_{crd} + A_{sc}f_{yd} = 1792,0+1,810\cdot 417 & = 2547\text{ kN} \\ A_c\sigma_{crd}(1+0,04\alpha) = 1792,0\cdot(1+0,04\cdot 21) & = 3297\text{ kN} \end{cases}$$

Søjlen kan således bære 2217 kN, dvs. bæreevnen ligger under belastningen på $\underline{N_{Ed} = 2500\text{ kN}}$

Spørgsmål 3:

Søjlelængden bliver i dette tilfælde

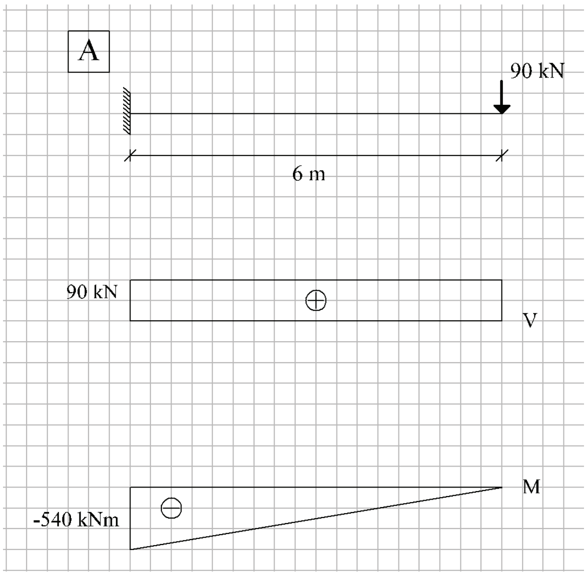
$$L_s = 0,7L < L$$

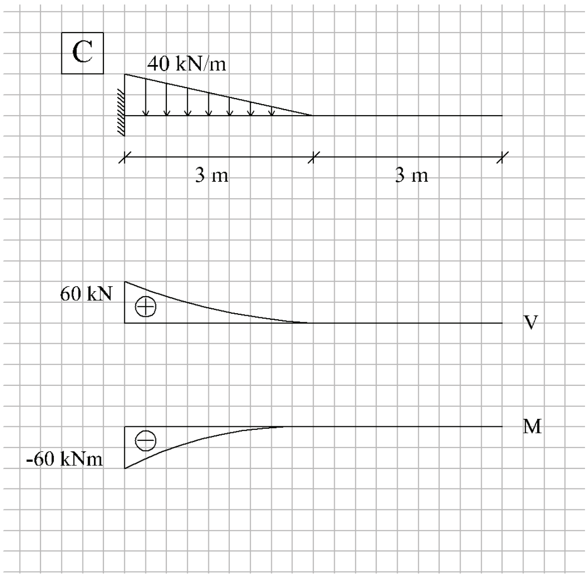
Dette er en kortere søjlelængde end i spørgsmål 1 og bæreevnen vil derfor være højere end i spørgsmål 1, hvor bæreevnen blev bestemt til 3385 kN. Dette er over den angivne last på 3200 kN og bæreevnen er derfor tilstrækkelig og kræver ikke yderligere undersøgelse.

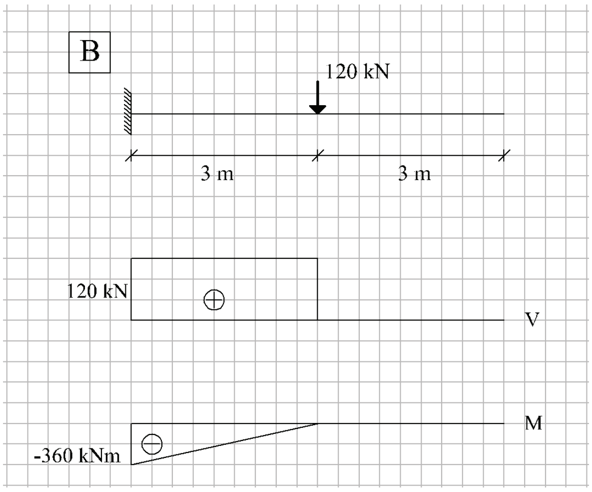
Det er dog også helt korrekt at beregne bæreevnen ud igen med denne, kortere søjlelængde. Bæreevnen bestemmes da til 3702 kN.

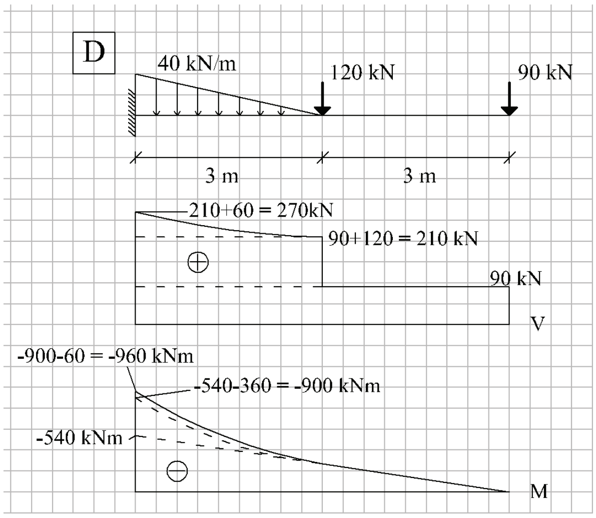
Betonkonstruktioner
Januar 2012

Opgave B11-10 - Besvarelse





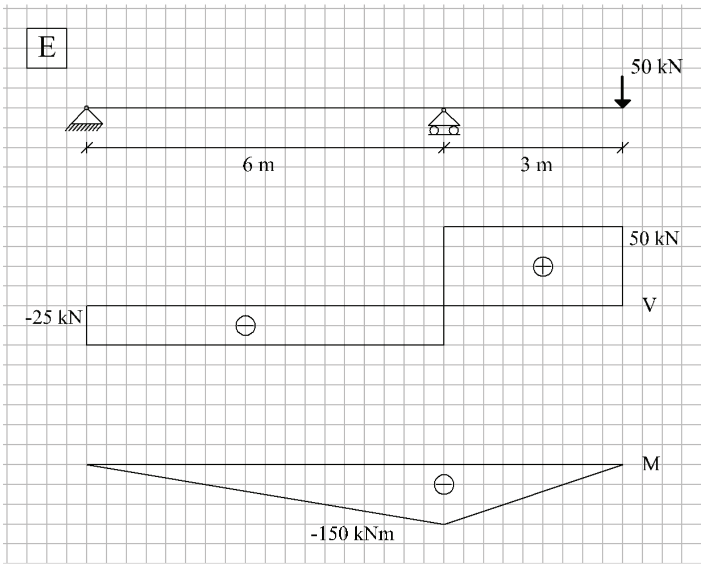


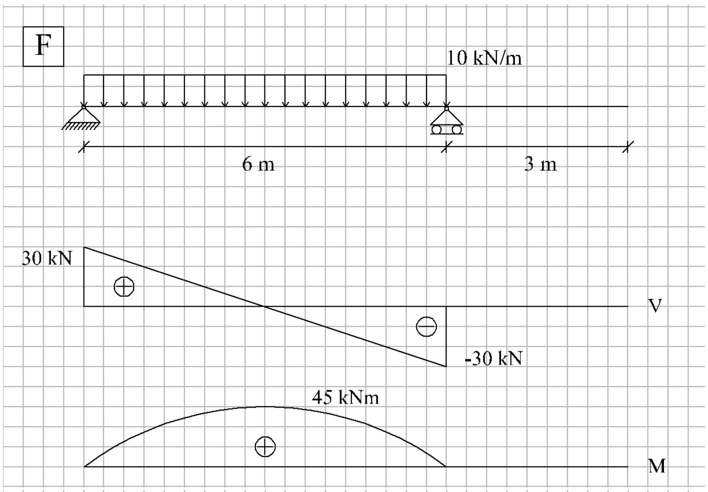


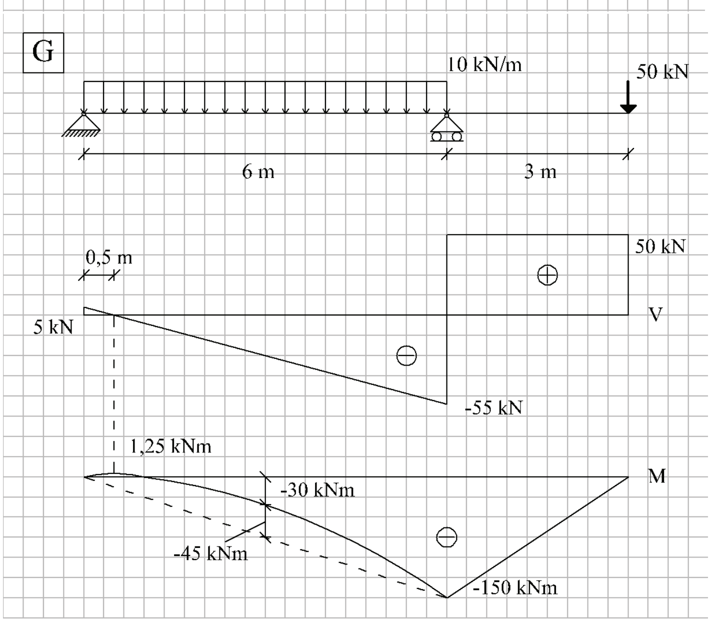
Bemærk: Bjælkerne A, B, C og D er ens, men har forskellig belastning. Da belastningen på bjælke D er en bestemt kombination (summen) af belastningerne på bjælkerne A, B og C – så er forskydningskurve og momentkurve den samme kombination af kurverne, vi bestemte for bjælkerne A, B og C.

Betonkonstruktioner

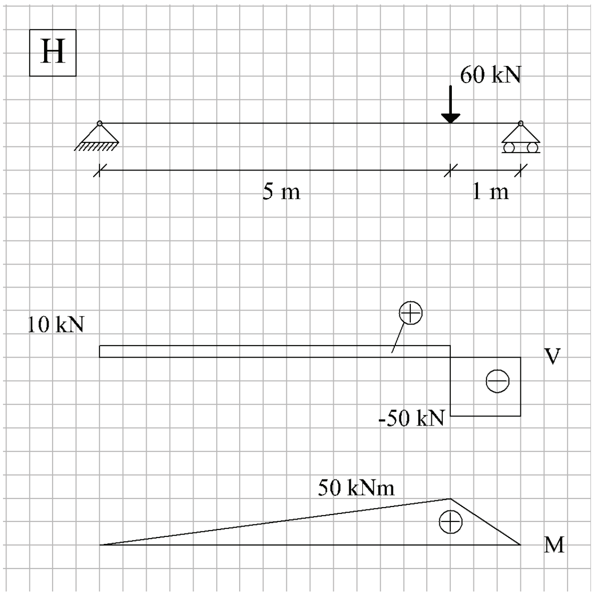
Januar 2012

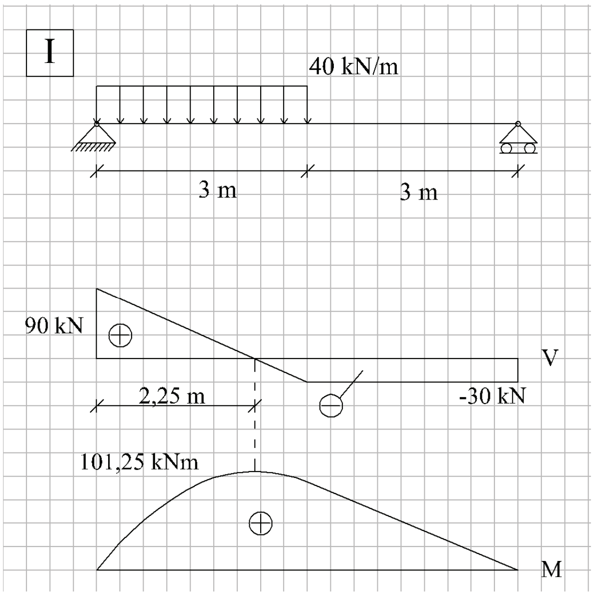


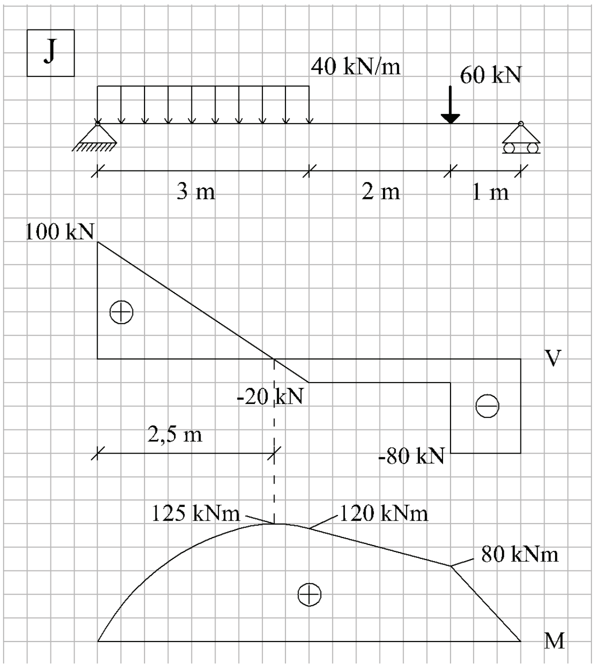




Bemærk: Bjælkerne E, F og G er ens, men har forskellig belastning. Da belastningen på bjælke G er en bestemt kombination (summen) af belastningerne på bjælkerne E og F – så er forskydningskurve og momentkurve den samme kombination af kurverne, vi bestemte for bjælkerne E og F.







<u>Bemærk</u>: Bjælkerne H, I og J er ens, men har forskellig belastning, hvor belastningen på J er summen af belastningerne på H og I.

Betonkonstruktioner

Januar 2012

Opgave B11-11 - Besvarelse

A. Materialeparametre og tværsnitsdata

$f_{ck} = 35$ MPa $\Rightarrow$ $f_{cd} = 35/1{,}45 = 24{,}2$ MPa

$f_{yk} = 500$ MPa $\Rightarrow$ $f_{yd} = 500/1{,}2 = 417$ MPa

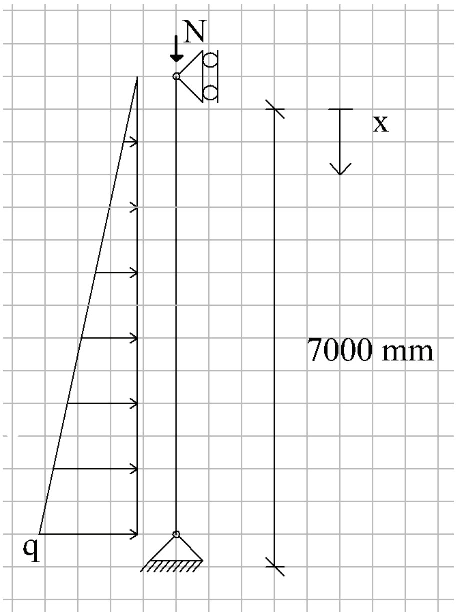
$E_{sd} = E_{sk} = 2 \cdot 10^5$ MPa

$$\left.\begin{aligned} A_s &= A_{sc} = 10\pi(16/2)^2 = 2011 \text{ mm}^2 \\ b &= 1000 \text{ mm} = 1 \text{ m} \end{aligned}\right\} \text{Vi regner på 1 m af væggen}$$

$d = 400 - 25 - 16/2 = 367$ mm

$d_{sc} = 25 + 16/2 = 33$ mm

Spørgsmål 1:



B. 1. ordens momentet uden udbøjningsbidrag.

$$R = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} qL = \frac{1}{6} qL = \frac{1}{6} \cdot 70 \cdot 7000 = 81{,}67 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$V(x) = -R + \frac{1}{2}(qx/L) \cdot x$$

M er maksimum ved V(x) = 0 $\Leftrightarrow$ $x = L/\sqrt{3}$, hvor

$$M_{Eod} = R \cdot x - \left(\frac{1}{2}(qx/L) \cdot x\right) \cdot x/3$$

$$= \frac{1}{6} q\, L x\left(1 - (x/L)^2\right) = \frac{1}{6} \frac{qL^2}{\sqrt{3}}(1 - 1/3)$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3}} \cdot 70 \cdot 7000^2 = 220{,}0 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 220{,}0 \text{ kNm}$$

C. Beregning af udbøjningen e_2

Vi beregner e_2 som

$$e_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{yd}}{d} \cdot L_s^2$$

$$\varepsilon_{yd} = 500/1,2/2 \cdot 10^5 = 2,08 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}$$

$$L_s = 7000 \text{ mm} \quad \Rightarrow$$

$$e_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{3,5 \cdot 10^{-3} + 2,08 \cdot 10^{-3}}{367} \cdot 7000^2 = 74,5 \text{ mm}$$

D. Beregning af momentet inkl. udbøjningsbidrag

$$M_{Ed} = M_{Eod} + N \cdot e_2 = 220,0 \cdot 10^6 + 950 \cdot 10^3 \cdot 74,5 = 290,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 290,8 \text{ kNm}$$

E. Bæreevneeftervisning

Kendes trykzonens højde x (eller gætter vi på den), så beregnes armeringstøjningerne som

$$\varepsilon_{sc} = \frac{x - d_{sc}}{x} \varepsilon_{cu3} \quad \text{(positiv som tryktøjning)}$$

$$\varepsilon_s = \frac{d - x}{x} \varepsilon_{cu3} \quad \text{(positiv som træktøjning)}$$

og kan derefter beregne spændingerne

$$\sigma_{sc} = \text{minimum} (f_{yd}, \ \varepsilon_{sc} E_{sd})$$

$$\sigma_s = \text{minimum} (f_{yd}, \ \varepsilon_s E_{sd})$$

og beregne normalkraft og moment

$$N_{Rd} = 0,8 \, b \, x \, f_{cd} + A_{sc} \, \sigma_{sc} - A_s \, \sigma_s$$

$$M_{Rd} = 0,8 \, b \, x \, f_{cd} \, (h/2 - 0,4x) + A_{sc} \, \sigma_{sc} \, (h/2 - d_{sc}) + \sigma_s A_s \, (d - h/2)$$

Vi varierer nu x (husk $0 < x < h$) indtil $N_{Rd} = N = 950$ kN, idet vi husker at voksende x giver voksende trykzone og voksende N_{Rd}.

Denne variation kaldes iteration og kan foretages på en moderne lommeregner med lignings-løser eller i f.eks. Excel – hvor der er en ligningsløser.

Vi finder på den måde x = 59,87 mm.

For at kontrollere vores beregninger på PC'en eller lommeregneren (og for at få det på papir) sætter vi i ligningerne

$$\varepsilon_{sc} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{59{,}87 - 33}{59{,}87} = 1{,}57 \cdot 10^{-3} \leq \varepsilon_{uk} = 50 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{s} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{367 - 59{,}87}{59{,}87} = 18{,}0 \cdot 10^{-3} \leq \varepsilon_{uk} = 50 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_{sc} = \min(417\ ,\ 1{,}57 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{5}) \quad = \min(417\ ,\ 314{,}2) = 314{,}2 \text{ MPa}$$

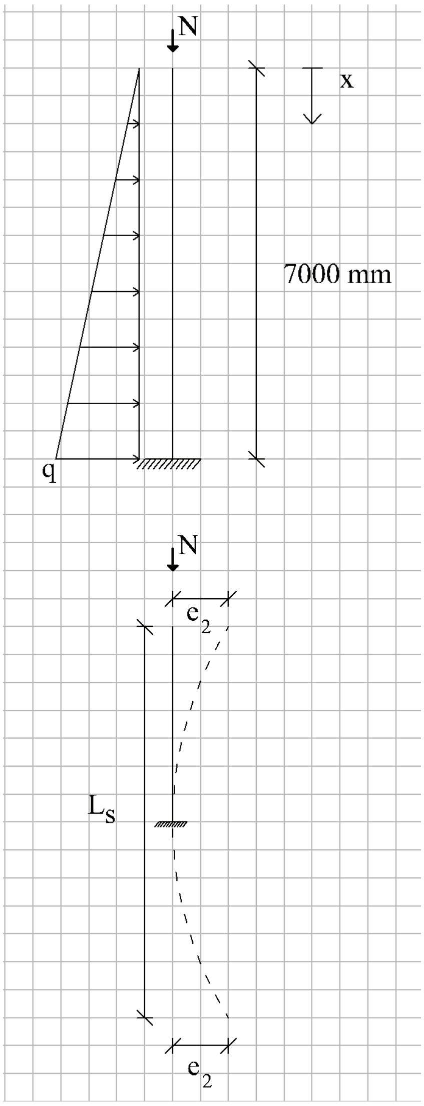
$$\sigma_{s} = \min(417\ ,\ 18{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{5}) \quad = \min(417\ ,\ 3600{,}0) = 417 \text{ MPa}$$

$$N_{Rd} = 0{,}8 \cdot 1000 \cdot 59{,}87 \cdot 24{,}2 + 2011 \cdot 314{,}2 - 2011 \cdot 417 = 952{,}4 \text{ kN} \sim 950 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= 0{,}8 \cdot 1000 \cdot 59{,}87 \cdot 24{,}2(400/2 - 0{,}4 \cdot 59{,}87) + 2011 \cdot 314{,}2(400/2 - 33) \\ &\quad + 2011 \cdot 417(367 - 400/2) = 448{,}9 \cdot 10^{6} \text{ Nmm} = 448{,}9 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Da $M_{Ed} = 290{,}8$ kNm $<$ $M_{Rd} = 448{,}9$ kNm , så er bæreevnen eftervist.

Spørgsmål 2



B. 1. ordens momentet uden udbøjningsbidrag.

$$M(x) = \frac{1}{2}(q\,x/L)\cdot x \cdot \frac{x}{3}$$
$$= \frac{1}{6}\,q\,x^3/L$$

Momentet er størst ved indspændingen

$$M_{Eod} = \frac{1}{6}\,q\,L^2 = \frac{1}{6}\cdot 70\cdot 7000^2 = 571{,}7\ kNm$$

C. Beregning af udbøjningen e_2

Det ses, at $L_s = 2L$, dvs.

$$e_2 = \frac{1}{10}\cdot\frac{3{,}5\cdot 10^{-3} + 2{,}08\cdot 10^{-3}}{367}(2\cdot 7000)^2 = 298{,}0\ \text{mm}$$

D. Beregning af momentet inkl. udbøjningsbidrag

$$M_{Ed} = M_{Eod} + Ne_2 = 571{,}7\cdot 10^6 + 950\cdot 10^3\cdot 298{,}0$$
$$= 854{,}8\cdot 10^3\ \text{Nmm} = 854{,}8\ \text{kNm}$$

E. Bæreevneeftervisning

Da tværsnittet og belastningen N er som i spm. 1 er brudmomentet det samme som i spm.1, dvs

$M_{Rd} = 448{,}9$ kNm $<$ $M_{Ed} = 854{,}8$ kNm

og væggen kan derfor ikke holde.

Betonkonstruktioner
Januar 2012

Opgave B11-12 - Besvarelse

Spørgsmål 1:

A. Materialeparametre

f_{ck} = 45 MPa, γ_c = 1,45 => f_{cd} = 45/1,45 = 31,0 MPa

f_{yk} = 500 MPa, γ_s = 1,2 => f_{yd} = 500/1,2 = 417 Mpa

B. 1. ordens momentet uden udbøjningsbidrag.

Førsteordensmomentet M_{Eod} (fra tværlast og søjlelast uden udbøjninger) er givet som

$$M_{Eod} = N \cdot e_1 + M_{tværlast} = N \cdot e_1 + 0,5 \cdot p \cdot L^2 = 90 \cdot 10^3 \cdot 100 + 0,5 \cdot 1 \cdot 5000^2 = 21,5 \cdot 10^6\, Nmm = 21,5 kNm$$

C. Beregning af udbøjningen e_2

Vi beregner 2. ordens udbøjningen e_2 som

$$e_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{\varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{yd}}{d} \cdot L_s^2$$

Ved beregningerne antager vi, at det kun er nødvendigt at 2 af armeringstængerne, nemlig de der er placerede ude ved den revnede side. Her finder vi

$$d = 400 - 25 - 6 - 16/2 = 361 mm$$
$$\varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s = 500/1,2/200000 = 2,08 \cdot 10^{-3}$$
$$\varepsilon_{uk} = 5\% = 50 \cdot 10^{-3}$$
$$\varepsilon_{cu3} = 3,5 \cdot 10^{-3}$$

Ved indsættelse findes

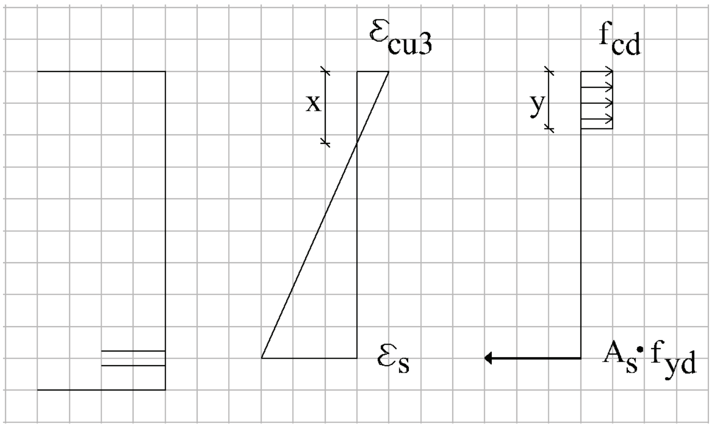
$$e_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{3,5 \cdot 10^{-3} + 2,08 \cdot 10^{-3}}{361} \cdot (2 \cdot 5000)^2 = 154,7 mm$$

D. Beregning af momentet inkl. udbøjningsbidrag

$$M_{Ed} = M_{Eod} + N \cdot e_2 = 21,5 \cdot 10^6 + 90 \cdot 10^3 \cdot 154,7 = 35,4 \cdot 10^6\, Nmm = 35,4 kNm$$

E. Bæreevneeftervisning

Vi gætter på at trækarmeringen er i flydning og ignorerer armeringen i tryksiden og ser at spændingsfordelingen så er som vist



Vi kender ikke trykzonens udstrækning, men vi ved at der er en plastisk spændingsfordeling med spændingen f_{cd} over arealet

$A_{cp} = y \cdot b$ hvor $y = 0,8x$, hvorefter lodret ligevægt giver

$$N = A_{cp} f_{cd} - A_s f_{yd} = 90kN \Leftrightarrow$$
$$y = A_{cp} / b = \frac{N + A_s f_{yd}}{b \cdot f_{cd}} = \frac{90 \cdot 10^3 + 2\pi(16/2)^2 \cdot 417}{400 \cdot 31,0} = 20,77mm^2 \Rightarrow$$
$$x = y / 0,8 = 20,77 / 0,8 = 25,97mm$$

Heraf kan vi beregne træktøjningen i armeringen for at checke antagelsen om flydning

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu3}}{x}(d - x) = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{25,97}(361 - 25,97) = 45,15 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$
$$\varepsilon_{yd} = 2,08 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_s = 45,15 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{uk} = 50 \cdot 10^{-3}$$

Da der er flydning og ikke overrivning af armeringen, har vi vist vores antagelse var korrekt og vi finder nu brudmomentet ved moment om midten af tværsnitttet (så N ikke indgår i formlerne) som

$$M_{Rd} = (byf_{cd})(h/2 - y/2) + (A_s f_{yd})(d - h/2)$$
$$= (400 \cdot 20,77 \cdot 31,0)(400/2 - 20,77/2) + (2\pi(16/2)^2 \cdot 417)(361 - 400/2)$$
$$= 75,83 \cdot 10^6\, Nmm = 75,83kNm \geq M_{Ed} = 35,4kNm$$

Bæreevnen er således eftervist.

Spørgsmål 2:

Søjlen skal undersøges for biaxial bøjning i kombination og her finder vi pga. ens slanhed, excentricitet og bøjning om de to akser, at vi skal checke kombinationen. Søjlen kan således bære, dersom

$$\left(\frac{M_{Ed,x}}{M_{Rd,x}}\right)^{\alpha}+\left(\frac{M_{Ed,y}}{M_{Rd,y}}\right)^{\alpha}\leq 1,0$$

Da der er symmetri, finder vi at

$$M_{Ed,x}=M_{Ed,y}=M_{Ed,spørgsmål\,1}=35,4kNm$$
$$M_{Rd,x}=M_{Rd,y}=M_{Rd,spørgsmål\,1}=75,83kNm$$

Vi kan også bestemme α=1,0 fra tabel 7.3, da

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}=\frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}+A_s f_{yd}}=\frac{90\cdot 10^3}{400\cdot 400\cdot 31,0+2\pi(16/2)^2 417}=0,017\leq 0,1$$

Herefter checker vi den samlede udnyttelsesgrad som

$$\left(\frac{M_{Ed,x}}{M_{Rd,x}}\right)^{\alpha}+\left(\frac{M_{Ed,y}}{M_{Rd,y}}\right)^{\alpha}=\left(\frac{35,4}{75,83}\right)^{1,0}+\left(\frac{35,4}{75,83}\right)^{1,0}=0,93\leq 1,0$$

Søjlen kan derfor bære i biaxial bøjning.

Opgave B11-13 - Besvarelse

Spørgsmål 1:

Vi anvender standardmetoden med at regne det statiske moment S_t om nullinien, placeret x under tværsnittets top, og bestemme x ved at sætte $S_t = 0$, hvorefter inertimomentet kan beregnes. Vi vælger at regne på en strimmel med en bredde på 1 m.

$$\alpha = 8 \Rightarrow E_c = E_s / \alpha = 2 \cdot 10^5 / 8 = 25000 MPa$$
$$S_t = b \cdot x \cdot (-x/2) + \alpha A_s (d - x) = 1000 \cdot x \cdot (-x/2) + 8 \cdot 8\pi (8/2)^2 (125 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 25,32 mm$$
$$I_t = \frac{1}{12} bx^3 + bx \cdot (x/2)^2 + \alpha A_s (d-x)^2$$
$$= 1000 \cdot 25,32 \cdot (25,32/2)^2 + 8 \cdot 8\pi (8/2)^2 (125 - 25,32)^2 = 37,38 \cdot 10^6 mm^4 \Rightarrow$$
$$EI = E_c I_t = \frac{E_s}{\alpha} I_t = \frac{2 \cdot 10^5}{8} \cdot 37,38 \cdot 10^6 = 934,4 \cdot 10^6 Nmm^2 / m$$

Vi har spændvidde og belastning angivet som

$$q = 5 kN/m^2 = 5 \cdot 10^{-3} N/mm^2$$
$$L = 4m = 4000 mm$$

og kan derfor beregne den enkeltspændte plades nedbøjning som for en bjælke som

$$u_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4000^4}{934,4 \cdot 10^6} = 17,8 mm > L/250 = 4000/250 = 16 mm$$

Den enkeltspændte plade har således IKKE den nødvendige stivhed og nedbøjningen er for stor. I praksis vil man være nødt til enten at anvende mere armering og/eller tykkere beton, eller at regne på den dobbeltspændte plade.

Alternativt kan vi beregne stivheden af et tværsnit, med rektangulær trykzone og et lag trækarmering udsat for ren bøjning efter αρ-metoden

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{\pi (8/2)^2}{125 \cdot 125} = 0,00322$$
$$\alpha\rho = 8 \cdot 0,00322 = 0,02574$$
$$\beta = \alpha\rho \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha\rho} + 1} - 1 \right) = 0,02574 \left(\sqrt{\frac{2}{0,02574} + 1} - 1 \right) = 0,2026$$
$$\varphi_b = ½ \beta (1 - \beta/3) = ½ \cdot 0,2026 \cdot (1 - 0,2026/3) = 0,09446$$
$$EI = E_c I_t = E_c \varphi_b \beta d^3 b = 25000 \cdot 0,09446 \cdot 0,2026 \cdot 125^3 \cdot 1 = 934,4 \cdot 10^6 Nmm^2 / mm$$

Spørgsmål 2:

Ved den dobbeltspændte plade beregnes nedbøjningen som

$$u_{\max} = \alpha \frac{qL^4}{EI}$$

hvor α er en parameter for nedbøjningen af en plade af lineært elastisk materiale, som kan findes på de udleverede overheads eller i Teknisk Ståbi, kapitel 3.4 ”Plader af lineært elastiske materialer) som

$$\alpha = 0,010 \Rightarrow$$

$$u_{\max} = 0,010 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4000^4}{934,4 \cdot 10^6} = 13,7mm < L/250 = 16mm$$

Ved at regne pladen dobbeltspændt viser vi dermed at stivheden er tilstrækkelig overfor den bevægelige korttidslast.

Bemærk: Ved at regne pladen dobbeltspændt har vi i dette eksempel reduceret bæreevnen til 13,7/17,8=77% af nedbøjningen for en enkeltspændt plade.

Spørgsmål 3:

Vi beregner pladens bøjningsstivhed som i spørgsmål 1, blot ændres α til langtidsværdien, nemlig

$$\alpha = 32 \Rightarrow E_c = E_s / \alpha = 2 \cdot 10^5 / 32 = 6250 MPa$$

$$S_t = b \cdot x \cdot (-x/2) + \alpha A_s (d-x) = 1000 \cdot x \cdot (-x/2) + 32 \cdot 8\pi(8/2)^2 (125 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 45{,}29 mm$$

$$I_t = \frac{1}{12} bx^3 + bx \cdot (x/2)^2 + \alpha A_s (d-x)^2$$

$$= 1000 \cdot 45{,}29 \cdot (45{,}29/2)^2 + 32 \cdot 8\pi (8/2)^2 (125 - 45{,}29)^2 = 112{,}7 \cdot 10^6 mm^4 \Rightarrow$$

$$EI = E_c I_t = \frac{E_s}{\alpha} I_t = \frac{2 \cdot 10^5}{32} \cdot 112{,}7 \cdot 10^6 = 704{,}5 \cdot 10^6 Nmm^2 / m$$

Vi finder derefter nedbøjningen som

$$u_{\max} = 0{,}0105 \cdot \frac{(3{,}6 + 2{,}5) \cdot 10^{-3} \cdot 4000^4}{704{,}5 \cdot 10^6} = 23{,}3 mm < L/150 = 4000/150 = 26{,}7 mm$$

Vi ser at langtidsnedbøjningen holder sig under den krævede grænse, dvs. pladen er tilstrækkelig stiv.

Alternativt kan vi beregne stivheden af et tværsnit, med rektangulær trykzone og et lag trækarmering udsat for ren bøjning efter αρ-metoden

$$\alpha\rho = 32 \cdot 0{,}00322 = 0{,}1030$$

$$\beta = \alpha\rho \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha\rho} + 1} - 1 \right) = 0{,}1030 \left(\sqrt{\frac{2}{0{,}1030} + 1} - 1 \right) = 0{,}3625$$

$$\varphi_b = ½\beta(1 - \beta/3) = ½ \cdot 0{,}3625 \cdot (1 - 0{,}3625/3) = 0{,}1593$$

$$EI = E_c I_t = E_c \varphi_b \beta d^3 b = 6250 \cdot 0{,}1593 \cdot 0{,}3625 \cdot 125^3 \cdot 1 = 704{,}5 \cdot 10^6 Nmm^2 / mm$$

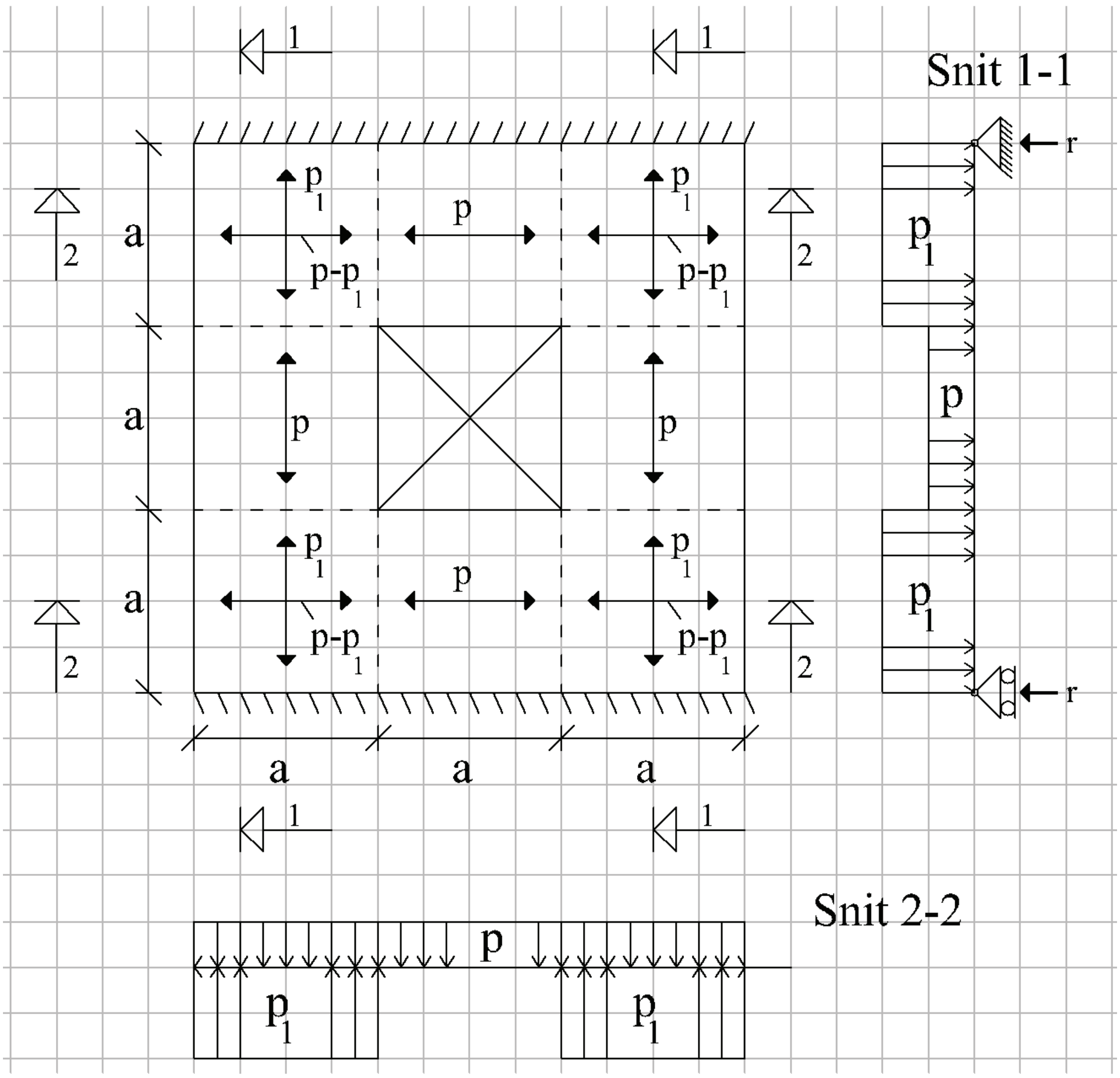
Bemærk: Betonens E-modul falder med en faktor 4 ved at vi går fra korttidsbelastning til langtidsbelastning, men det revnede tværsnits stivhed ved langtidslast falder kun til 705,0/934,4=75% af stivheden overfor korttidslast.

Dette skyldes at det primært er trækarmeringens stivhed og den effektive højde der styrer bøjningsstivheden af det revnede tværsnit.

Opgave B11-14 - Besvarelse

Spørgsmål 1:

Lastfordeling og strimlernes statiske modeller:

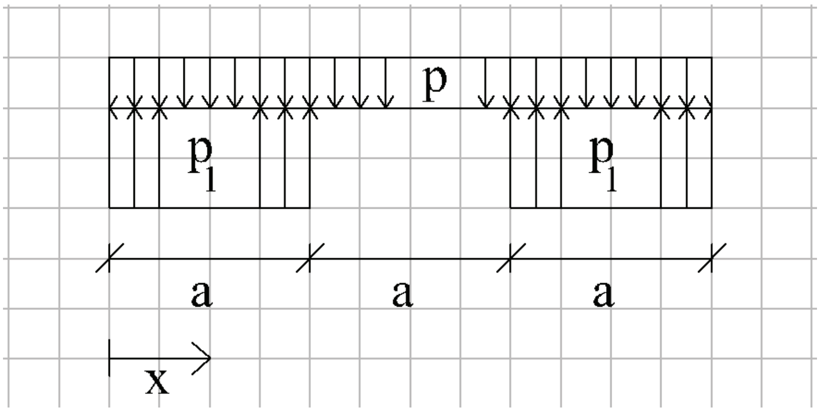


Vi har her forestillet os at vi har lagt strimmel 1 på først, spændende fra understøtning til understøtning og så lagt strimmel 2 ovenpå strimmel 1 (se kogebogen bagi løsningen).

Beregning af de enkelte strimlers bæreevne:

Der er her strimler (bjælker) i to retninger, nemlig i snit 1 og 2, som undersøges separat. Vi undersøger altid den strimmel der er lagt på til sidst

Vedr. snit 2-2:



Lodret ligevægt: $p \cdot 3a - p_1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow p_1 = \frac{3}{2} \cdot p$

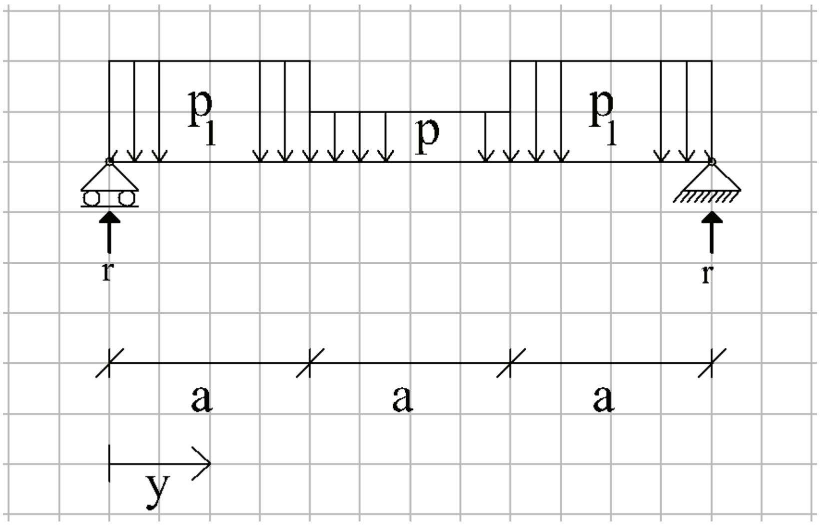
Momentmaksimum findes pga symmemtri på midten, dvs. i x=1,5a, hvor

$$m_{x,\max} = m_x(x = 1.5a) = p_r a \cdot a - p\frac{3}{2}a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3}{8}\, p\, a^2$$

Den nedreværdi, der gælder for denne strimmel findes nu af

$$m_{x,\max} \leq m_{ux} = \frac{1}{3}\, m_u \quad \Rightarrow \quad \underline{p^- \leq \frac{8}{9}\frac{m_u}{a^2}}$$

Vedr. snit 1-1:



Lodret ligevægt:

$$2a\,p_1 + a\,p - 2r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2\,p\,a \qquad \text{(idet } p_1\text{=1.5p)}$$

Bestemmelse af momentet m_y:

Da der er symmetri, ses det at momentet er størst på midten, hvor

$$m_{y,\max} = -p_1 \cdot a \cdot a - p\,\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4} + r\cdot\frac{3}{2}\,a \;= -\frac{3}{2}\,p\,a^2 - \frac{1}{8}\,p\,a^2 + 3\,p\,a^2 = \frac{11}{8}\,p\,a^2$$

Den nedreværdi, der gælder for denne strimmel bjælke) findes nu af

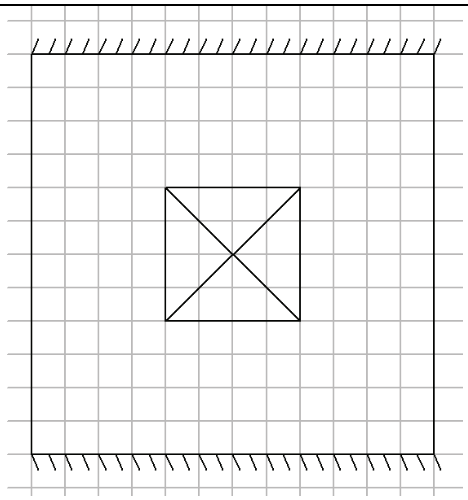
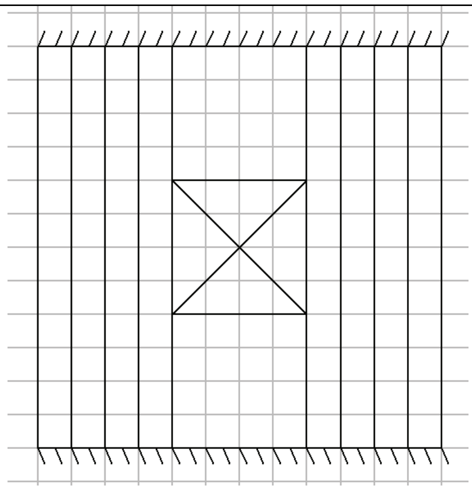
$$m_{y,\max} = \frac{11}{8}\,p\,a^2 \le m_{uy} = m_u \quad \Rightarrow p^- \le \frac{8}{11}\,\frac{m_u}{a^2}$$

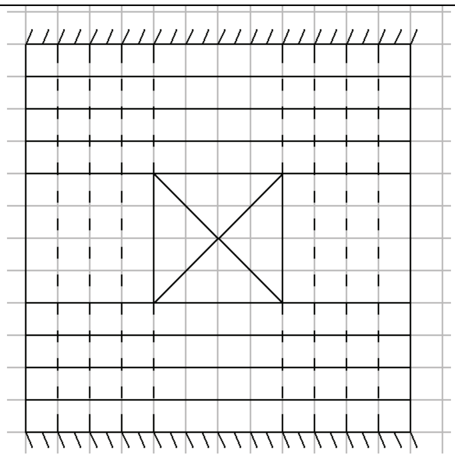
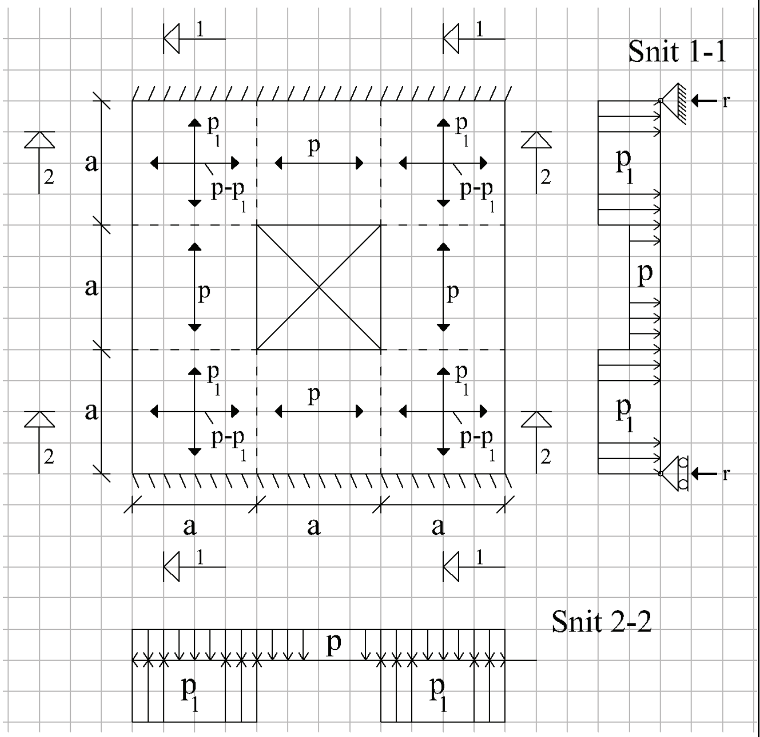
Den samlede nedreværdi

Denne er den mindste af de to nedreværdier, dvs. den mindste af de to strimlers bæreevner

$$p^- = \frac{8}{11}\,\frac{m_u}{a^2} \le \frac{8}{9}\,\frac{m_u}{a^2}$$

Kogebog for opstilling af strimmelmodel.

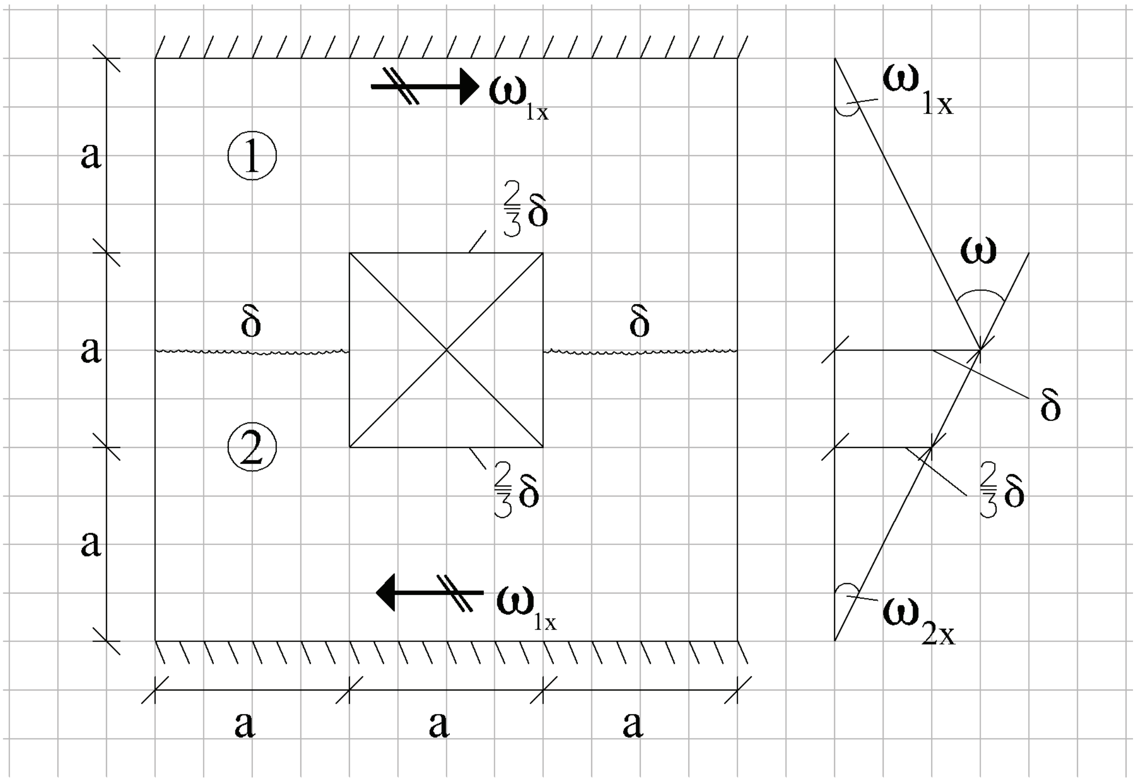
	Vi forestiller os i virkeligheden at vi starter med det tomme felt (fx et hul i jorden eller en manglende etageadskillelse).
	Vi lægger så de første strimler (eller brædder eller planker eller bjælker) ud. De skal understøttes, så de ikke kan falde ned og vi lægger dem derfor fra understøtning til understøtning. Det kalder vi strimmel 1 eller snit 1. I dette tilfælde har vi lagt to hold planker ud, et hold på hver side af det område, der skal blive ved med at være et hul, men da vi kan se at der er dobbeltsymmetri i pladen, så kalder vi begge hold strimler for 1.

	Vi lægger nu de næste strimler ovenpå, et hold på hver side af det områder, der skal blive ved med at vare hul. Da vi ser en symmetri, kalder vi begge hold planker for 2, da vi kan se at de får samme spænd, samme last og samme understøtningsbetingelser.
	Vi kan nu fordele belastningen på de to hold strimler, og vi starter altid med det lag vi har lagt på til sidst. På strimmel 2 lægges der derfor lasten p på oversiden, mens strimmel 1 holder strimmel 2 oppe med en ukendt reaktion på p_1. Strimmel 1 er derfor belastet med p_1 på de stykker, hvor den ligger under strimmel 2 og med lasten p på det stykke, der ikke ligger under strimmel 2. Strimmel 1 er simpelt understøttet i begge ender. Vi kan nu optegne vores model med strimlernes modeller og med en oversigt over hvordan vi optager lasten i pladen.

Detaljerede eksempler med opstilling af strimmelmetode modeller kan ses i eksemplerne i lærebogen på www.betonkonstruktioner.byg.dtu.dk

Spørgsmål 2:

Den kinematisk mulige brudfigur: Denne kan f.eks. kan se ud som nedenfor



Beregning af indre og ydre arbejde og bæreevne:

$$\tilde{A}_i = -\int m \cdot \omega \cdot ds = -m_u 2a \cdot \varpi_{1x} - m_u 2a \cdot \varpi_{2x} = -m_u \cdot \frac{2\delta}{3a} \cdot 2 \cdot 2a = \frac{8}{3}\delta\, m_u$$

$$A_y = \int p \cdot u \cdot dA = p \cdot \frac{\delta}{2} \cdot 3a^2 + p \cdot \frac{\delta}{3} \cdot 2a^2 + p \cdot \frac{\delta}{2} \cdot 3a^2 = \frac{11}{3}\delta \cdot p\, a^2$$

Ved at sætte $-\tilde{A}_i = A_y$ finder vi

$$p = \frac{3}{11} A_y / a^2 = \frac{8}{11} \frac{m_u}{a^2}$$

Kommentarer

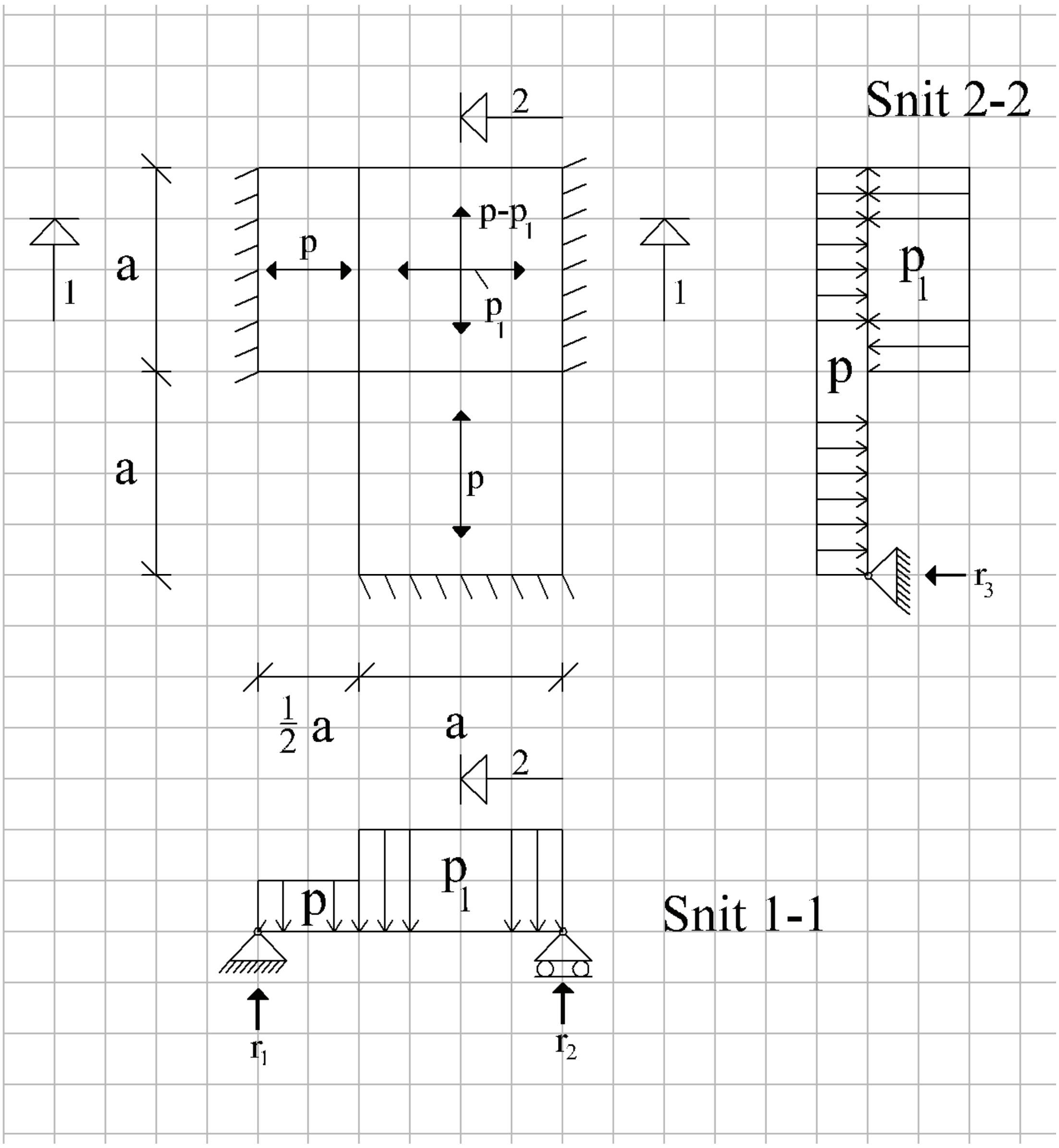
Da vi bemærker at øvreværdien og nedreværdien identiske ($p^- = p^+$), så er det den præcise bæreevne, som vi har bestemt.

Betonkonstruktioner
Januar 2012

Opgave B11-15 - Besvarelse

Spørgsmål 1:

Lastfordeling og strimlernes statiske modeller:

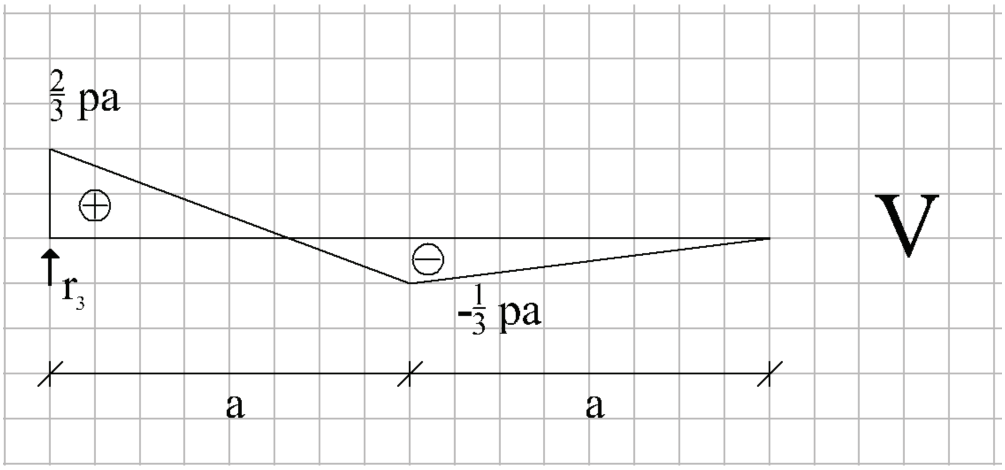


<u>Beregning af de enkelte strimlers bæreevne:</u>

<u>Der regnes først på strimmel 2, svarende til snit 2-2</u>, hvor momentligevægt om punkt FE giver en bestemmelse af p_1:

$$a(p-p_1)\cdot\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}pa^2=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{p_1=\frac{4}{3}\,p}$$

Den nemmeste måde at bestemme det eller de maksimale momenter er at starte med at optegne forskydningskraftkurven



Da momentmaksimum altid forekommer ved indspændinger eller de steder, hvor forskydningskraften er nul og der ikke er nogen indspændinger finder vi $v(y=\frac{4}{3}a)=0$ så maksimummomentet er i $y=\frac{4}{3}a$, dvs

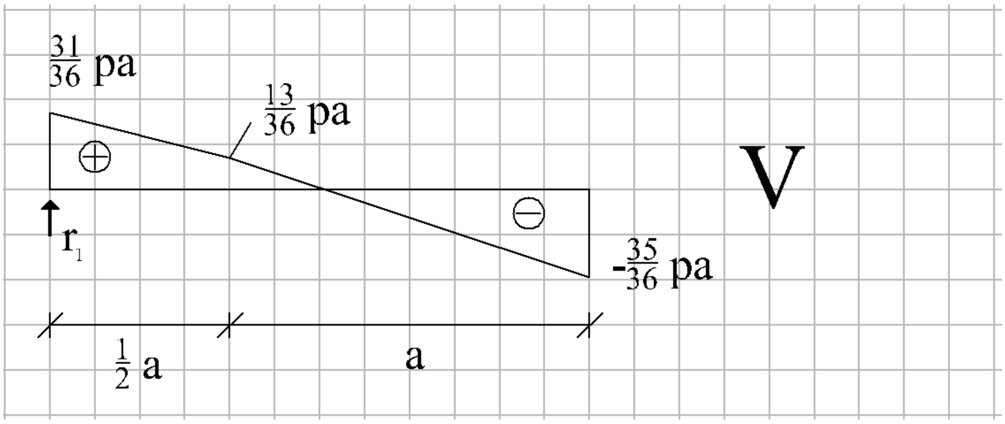
$$\max m_y = p_1\cdot a\cdot(\frac{a}{3}+\frac{a}{2})-\frac{1}{2}\cdot p\cdot(\frac{4a}{3})^2=\frac{2}{9}pa^2\le m_u \quad\Rightarrow p^-\le 4,5\frac{m_u}{a^2}$$

<u>Derefter regnes der på strimmel 1, svarende til snit 1-1</u>, hvor reaktionerne findes ved at tage moment om de to vederlag (understøtninger):

$$m_{AH} = \tfrac{1}{2} p(a/2)^2 + p_1 \cdot a^2 - r_2 \cdot \frac{3}{2} a = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{2pa}{3 \cdot 8} + \frac{2p_1 a}{3} = \frac{35}{36}\, ap$$

$$m_{CD} = \tfrac{1}{2} p_1 \cdot a^2 + p(a/2)(5a/4) - r_1 \cdot \frac{3}{2} a = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{p_1 a}{3} + \frac{2 \cdot 5pa}{3 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{31}{36}\, ap$$

Som ved den første strimmel beregnes forskydningskraftkurven



Det ses at forskydningskraften er nul i

$$x = \frac{a}{2} + \frac{13}{48} a = \frac{37}{48} a$$

Herefter beregnes det maksimale momentet som

$$\max \underline{m_x} = r_2 \cdot (\frac{3}{2} a - x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} p \cdot (\frac{3}{2} a - x)^2 = \underline{\frac{2}{3}\left(\frac{35}{48}\right)^2 a^2 p} \;\; \cong 0{,}354\; a^2 p \le \frac{3}{2} m_u \Rightarrow$$

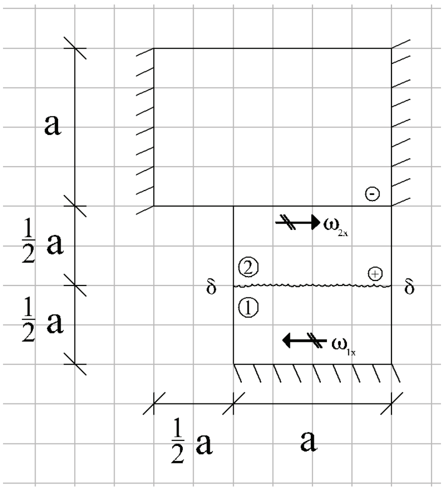
$$p^- \le \left(\frac{72}{35}\right)^2 \frac{m_u}{a^2} \cong 4{,}24 \frac{m_u}{a^2}$$

Den samlede nedreværdi for strimlerne findes som den laveste af nedreværdierne, dvs.

$$\underline{p^- = \left(\frac{72}{35}\right)^2 \frac{m_u}{a^2}} \cong 4{,}24 \frac{m_u}{a^2}$$

Spørgsmål 2:

Partiel brudfigur:
Kinematisk mulig brudfigur, beregning af indre og ydre arbejde, samt bæreevnen.



(1) $\omega_{1x} = 2\delta / a \qquad \omega_{1y} = 0$

$$A_i^{(1)} = m_u a \cdot \omega_{1x} = m_u\, a \cdot \frac{2\delta}{a} = 2\delta m_u$$

(2) $\omega_{2x} = 2\delta / a \qquad \omega_{2y} = 0$

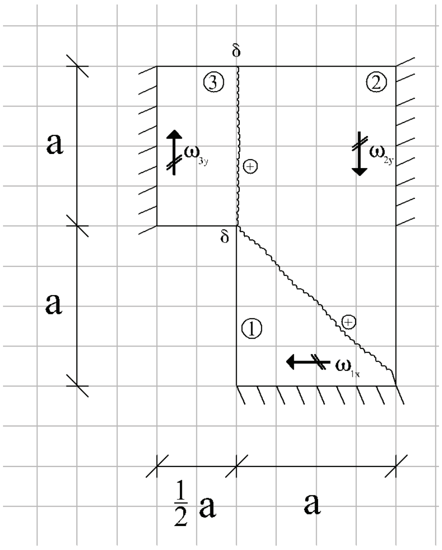
$$A_i^{(2)} = m_u a \cdot \omega_{2x} = m_u\, a \cdot \frac{2\delta}{a} = 2\delta m_u$$

$$A_i = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} = 4\delta m_u$$

$$A_y = a^2 p \cdot \frac{\delta}{2}$$

$$A_i = A_y \quad \Rightarrow \quad p^+ = 8\,\frac{m_u}{a^2}$$

Total brudfigur, forslag 1
Kinematisk mulig brudfigur, beregning af indre og ydre arbejde, samt bæreevnen.



(1) $\omega_{1x} = \delta / a \qquad \omega_{1y} = 0$

$$A_i^{(1)} = m_u a \cdot \omega_x = m_u\, a\, \frac{\delta}{a} = \delta\, m_u$$

(2) $\omega_{2x} = 0 \qquad \omega_{2y} = \delta / a$

$$A_i^{(2)} = \frac{3}{2}\, m_u\, a \cdot \omega_{2y} = \frac{3}{2}\, m_u\, a \cdot \frac{\delta}{a} = \frac{3}{2}\delta m_u$$

(3) $\omega_{3x} = 0 \qquad \omega_{3y} = 2\delta / a$

$$A_i^{(3)} = \frac{3}{2}\, m_u\, a \cdot \omega_{3y} = \frac{3}{2}\, m_u\, a \cdot \frac{2\delta}{a} = 3\delta\, m_u$$

$$A_i = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + A_i^{(3)} = \left(1 + \frac{3}{2} + 3\right)\delta m_u = \frac{11}{2}\delta m_u$$

$$A_y = \frac{1}{2}\, a^2\, p \cdot \frac{\delta}{3} \cdot 2 + a^2\, p \cdot \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} a^2 p \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{13}{12}\,\delta a^2\, p$$

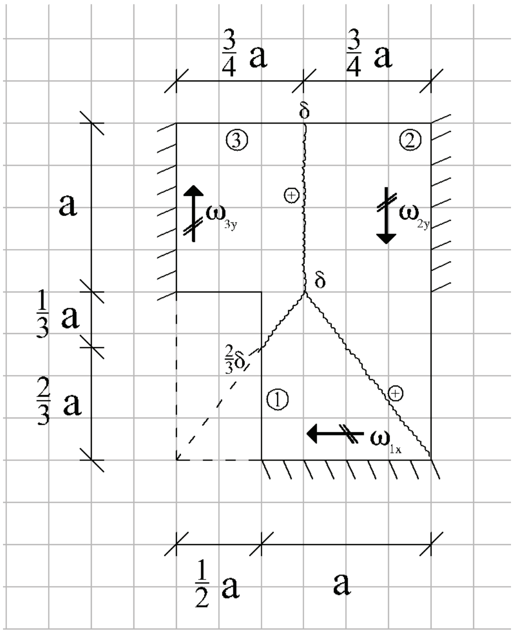
$$A_y = A_i \quad \Rightarrow \quad p^+ = \frac{11}{2} \cdot \frac{12}{13}\, \frac{m_u}{a^2} = \frac{66}{13}\, \frac{m_u}{a^2} \cong 5{,}08\, \frac{m_u}{a^2}$$

Heraf finder vi at

$$\underline{p^- = 4{,}23\, \frac{m_u}{a^2} \le p \le p^+ = 5{,}08\, \frac{m_u}{a^2}}$$

Betonkonstruktioner
Januar 2012

Total brudfigur, forslag 2
Kinematisk mulig brudfigur, beregning af indre og ydre arbejde, samt bæreevnen.



(1) $\omega_{1x} = \delta / a \qquad \omega_{1y} = 0$

$$A_i^{(1)} = m_u \, a \, \omega_{1x} = m_u \, a \, \frac{\delta}{a} = \underline{\delta m_u}$$

(2) $\omega_{2x} = 0 \qquad \omega_{2y} = \dfrac{4\delta}{3a}$

$$A_i^{(2)} = \frac{3}{2} m_u \, a \cdot \omega_{2y} = \frac{3}{2} m_u \, a \cdot \frac{4\delta}{3a} = \underline{2\delta m_u}$$

(3) $\omega_{3x} = 0 \qquad \omega_{3y} = \dfrac{4\delta}{3a}$

$$A_i^{(3)} = \frac{3}{2} m_u \, a \cdot \omega_{3y} = \frac{3}{2} m_u \, a \cdot \frac{4\delta}{3a} = \underline{2\delta m_u}$$

$$A_i = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + A_i^{(3)} = (1+2+2)\delta m_u = \underline{5\delta m_u}$$

$$A_y = \frac{\delta}{2} a \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} ap + \frac{\delta}{3} \cdot \frac{3a}{4} ap + \frac{1}{3}\left(\frac{2\delta}{3} + \frac{2\delta}{3} + \delta\right)\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4} p + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\delta}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{4} p = \frac{121}{108} \delta a^2 p$$

$$A_i = A_y \qquad \Rightarrow \qquad p^+ = \frac{108}{121} \cdot 5 \, \frac{m_u}{a^2} = \frac{540}{121} \frac{m_u}{a^2} \cong \underline{4{,}46 \, \frac{m_u}{a^2}}$$

Heraf finder vi at

$$\underline{p^- = 4{,}23 \frac{m_u}{a^2} \le p \le p^+ = 4{,}46 \frac{m_u}{a^2}}$$

Yderligere forklaring på beregning af ω, A_i og A_y findes på de næste sider for denne brudfigur.
Jeg har der lavet en slags "kogebog" for hvordan man gør det systematisk og detaljeret – selvom løsningen ovenover er tilstrækkelig, når man først har forstået systemet.

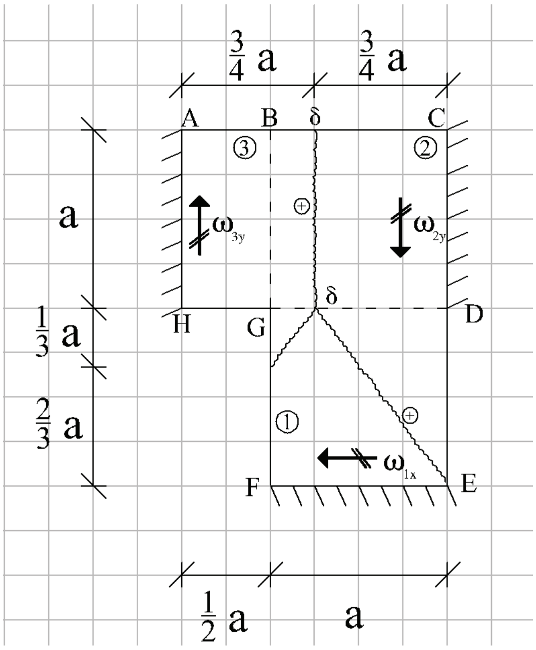
<u>Kommentarer</u>

Vi bemærker at forskellige brudfigurer leder til forskellige øvreværdløsninger. En yderligere optimering eller valg af alternative brudfigurer kunne muligvis lede til lavere øvreværdiløsninger.

Da vi bemærker at $p^- < p^+$, dvs. at nedreværdiløsningen og øvreværdiløsningen ikke er identiske, så er vi endnu ikke sikre på den præcise bæreevne i pladen, men vi har dog bestemt et ret lille interval, hvori den korrekte bæreevne p skal ligge.

Brugen af nedre og øvreværdløsninger gør det således muligt at vurdere om det er rimeligt at regne flere øvre eller nedreværdiløsninger igennem – i det aktuelle eksempel er vi nået frem til at den korrekte bæreevne således højst kan ligge 5,4 % højere end den fundne nedreværdi.

Kogebog for beregning af det indre arbejde
Eksempel for brudfiguren i forslag 2.



(1) Drejningen om et rotationsakse et nedbøjningen i flydelinien, divideret med den vinkelrette afstand imellem punktet på flydelinien og rotationsaksen, dvs.

$$\omega_{1x} = \delta / a \qquad \omega_{1y} = 0$$

Det indre arbejde beregnes nu som

$$A_i^{(1)} = \int m_u \omega \cdot ds$$

Vi projekterer længden af brudlinien ind på rotationsaksen E-F, og finder

$$A_i^{(1)} = m_{uy}^{(DEFG)} \, a \, \omega_{1x}$$

Brudmomentet m_{ux} i området DEFG betegnes her $m_{uy}^{(DEFG)}$ og er opgivet i opgaveteksten til m_u. Vi kan nu sætte værdien ind og finder

$$A_i^{(1)} = m_u \, a \, \omega_{1x} = m_u \, a \, \frac{\delta}{a} = \underline{\delta m_u}$$

(2) Ligesom for pladedel 1 beregner vi rotationen og projekterer derefter længden af brudlinien ind på omdrejningsaksen C-D-E og lægger bidragene fra de to områder med forskelligt brudmoment sammen og finder

$$\omega_{2x} = 0 \qquad \omega_{2y} = \delta / \frac{3a}{4} = \frac{4\delta}{3a}$$

$$A_i^{(2)} = m_{ux}^{(BCDG)} \cdot a \cdot \omega_{2y} + m_{ux}^{(DEFG)} \cdot a \cdot \omega_{2y} = \frac{3}{2} m_u \, a \cdot \omega_{2y} + 0 \cdot a \cdot \omega_{2y} = \frac{3}{2} m_u \, a \cdot \frac{4\delta}{3a} = \underline{2\delta m_u}$$

(3) $\omega_{3x} = 0 \qquad \omega_{3y} = \delta / \frac{3a}{4} = \frac{4\delta}{3a}$

$$A_i^{(3)} = m_{uy}^{(ABGD)} \, a \cdot \omega_{3y} + m_{uy}^{(DEFG)} \frac{a}{3} \cdot \omega_{3y} = \frac{3}{2} m_u \, a \cdot \omega_{3y} + 0 \cdot \frac{a}{3} \cdot \omega_{3y} = \frac{3}{2} m_u \, a \cdot \frac{4\delta}{3a} = \underline{2\delta m_u}$$

Ved indsættelse finder vi nu

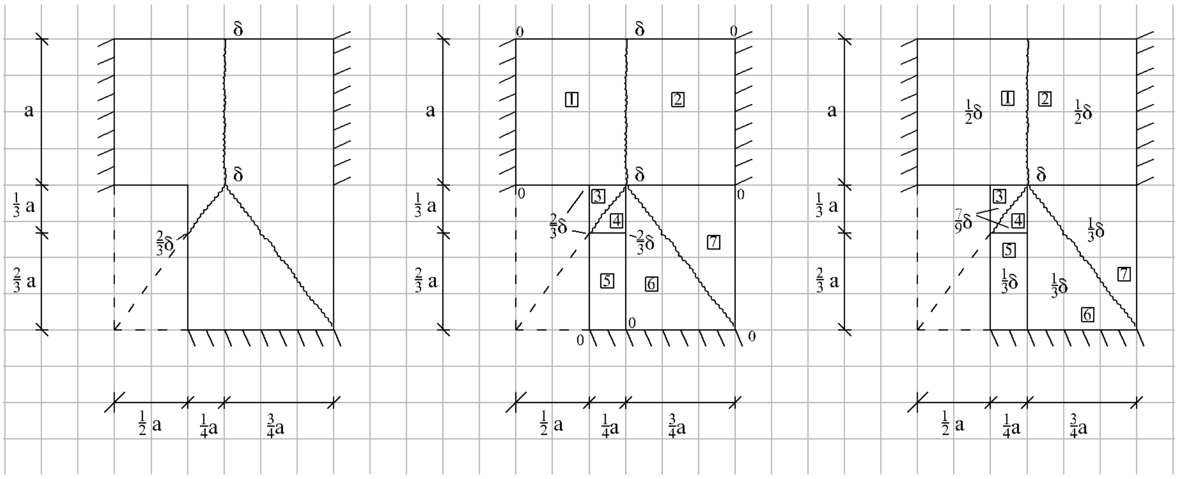
$$A_i = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + A_i^{(3)} = (1+2+2)\delta m_u = \underline{5\delta m_u}$$

Kogebog for beregning af det ydre arbejde
Eksempel for brudfiguren i forslag 2.

Det ydre arbejde er defineret som

$$A_y = \int p(x,y) \cdot \partial(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

Ofte er pladen belastet med en jævnt fordelt last, som er konstant over hele pladen eller i hvert fald i områder af pladen – og der kan det ydre arbejde beregnes nemt:



Step 1. Optegn brudfiguren

Step 2. Inddel brudfiguren i trekanter og rektangler.

Step 3. Beregn middelflytningen i hver trekant og hver firkant.

Man finder nu bidragene for de 7 delfelter og lægger dem sammen

$$A_y = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a \cdot p + \frac{\delta}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a \cdot p + \frac{7\delta}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot p + \frac{7\delta}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot p$$
$$+ \frac{\delta}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot p + \frac{\delta}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a + \frac{\delta}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a = \frac{121}{108} \delta \cdot a^2 \cdot p$$

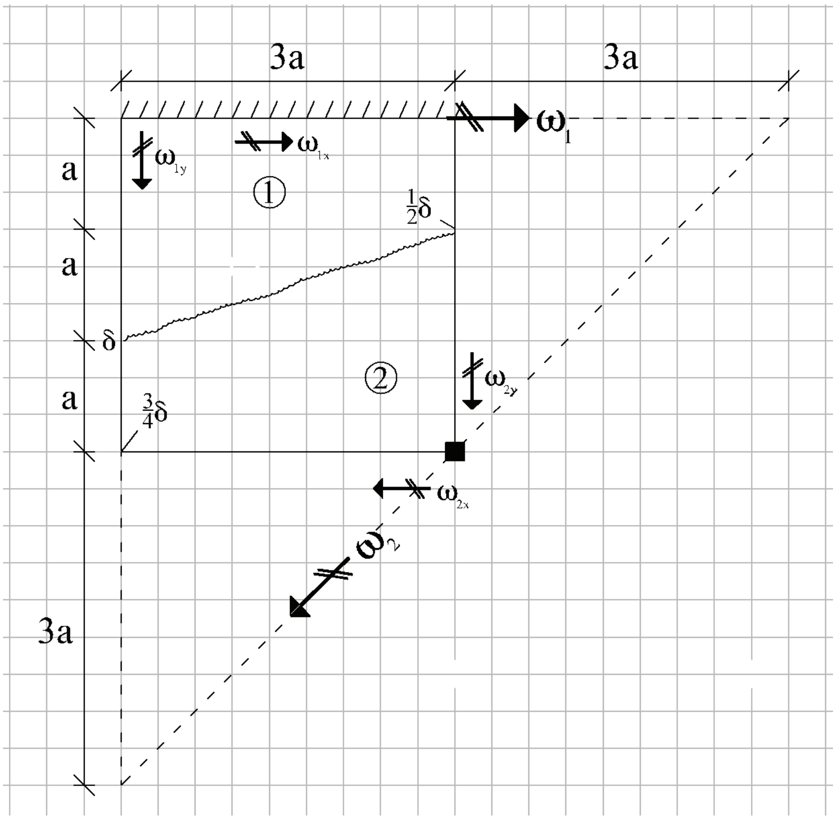
Her vil det dog ofte være muligt at tage flere bidrag samtidig, da man kan se at felt 1+2 har samme gennemsnitsflytning. Det samme gælder for felt 3+4 og for felt 6+7 og man kan se at felt 1+2, felt 3+4 og felt 6+7 giver nogle pæne rektangler, så man kan summere som

$$A_y = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot a \cdot p + \frac{7\delta}{9} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot p + \frac{\delta}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot p + \frac{\delta}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a = \frac{121}{108} \delta \cdot a^2 \cdot p$$

Advarsel: Denne metode duer kun, hvis lasten er konstant og jævn last i hver trekant og hvert rektangel.

Opgave B11-16 - Besvarelse

Spørgsmål 1:



Vi beregner først pladens rotation om x og y akserne

$$\omega_{1x} = \frac{\delta}{2a}$$

$$\omega_{1y} = 0$$

hvorefter vi kan kombinere dem til den samlede rotation

$$|\overline{\omega}_1| = \sqrt{\omega_{1x}^2 + \omega_{1y}^2} = \frac{\delta}{2a}$$

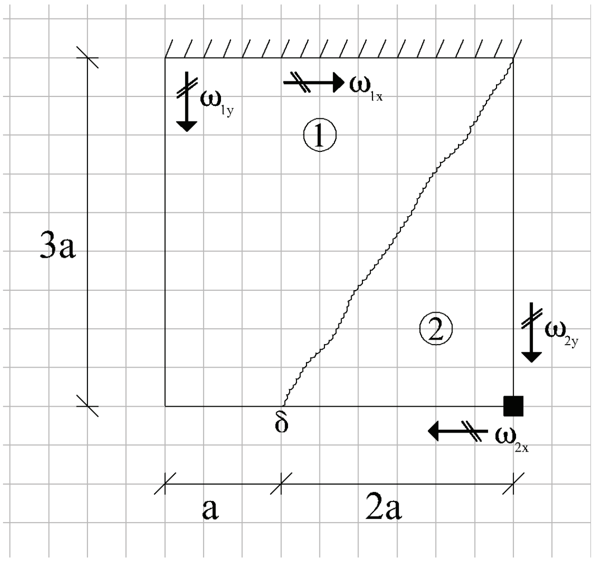
Vi beregner tilsvarende for den anden pladedel

$$\omega_{2x} = \frac{\delta/2}{2a} = \frac{\delta}{4a}$$

$$\omega_{2y} = \frac{3\delta/4}{3a} = -\frac{\delta}{4a}$$

$$|\overline{\omega}_2| = \sqrt{\omega_{2x}^2 + \omega_{2y}^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\delta}{a}$$

Spørgsmål 2:



Pladedel 1

$$\omega_{1x} = \frac{\delta}{3a} \quad ; \quad \omega_{1y} = 0$$

$$A_i^{(1)} = m_{uy} \cdot 2a \cdot \omega_{1x} = m_{uy}\, 2a \cdot \frac{\delta}{3a} = \frac{4}{3}\,\delta\, m_u$$

$$A_y^{(1)} = \left(3a \cdot a \cdot \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} 3a \cdot 2a \cdot \frac{\delta}{3}\right) p = \frac{5}{2}\, p a^2 \delta$$

Pladedel 2

$$\omega_{2x} = 0 \quad ; \quad \omega_{2y} = \frac{\delta}{2a}$$

$$A_i^{(2)} = m_u \cdot 3a \cdot \omega_{2y} = m_u \cdot 2a \cdot \frac{\delta}{2a} = \frac{3}{2}\delta\, m_u$$

$$A_y^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 3a \cdot p \cdot \frac{\delta}{3} = p a^2 \delta$$

Heraf finder vi at

$$A_i = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} = \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right)\delta\, m_u = \frac{17}{6}\delta\, m_u$$

$$A_y = A_y^{(1)} + A_y^{(2)} = \left(\frac{5}{2} + 1\right) p a^2 \delta = \frac{7}{2}\, p a^2 \delta$$

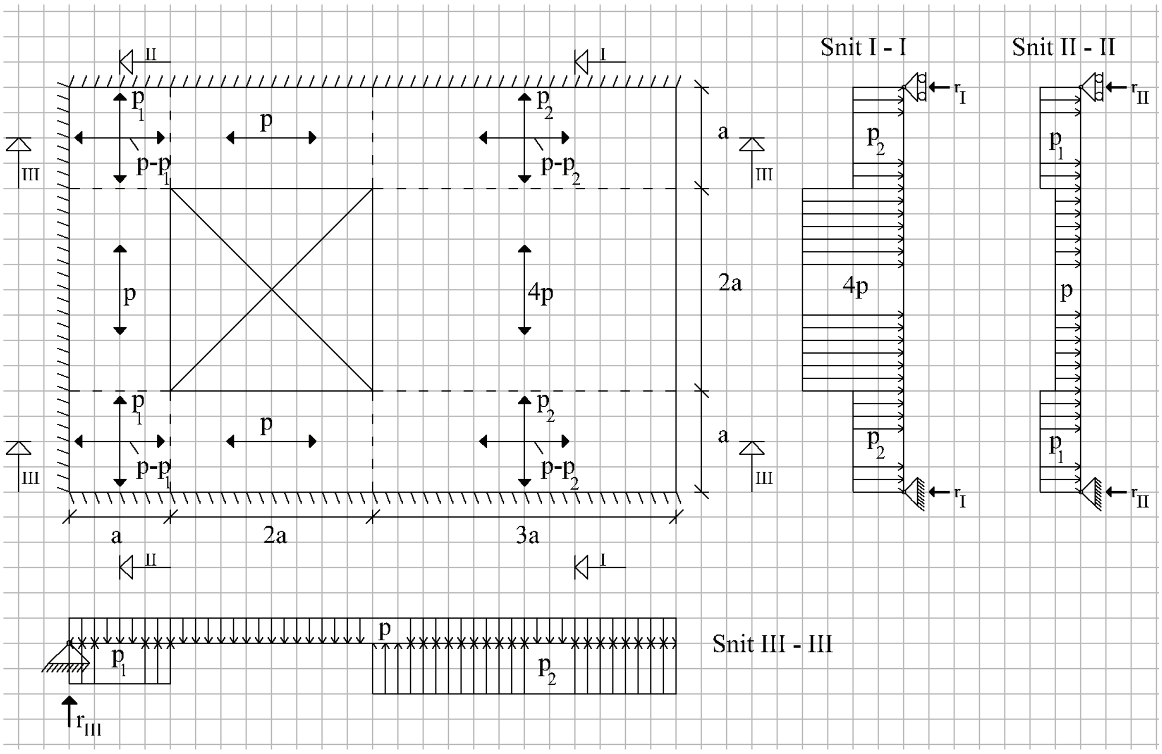
$$A_i = A_y \Rightarrow \quad p = \frac{2}{7} \cdot \frac{17}{6} \frac{m_u}{a^2} = \frac{17}{21} \frac{m_u}{a^2} = \underline{0{,}81\, \frac{m_u}{a^2}}$$

Betonkonstruktioner
Januar 2012

Opgave B11-17 - Besvarelse

Spørgsmål 1:

Lastfordeling og strimlernes statiske modeller:



Jeg har i denne modellering lagt strimlerne på i rækkefølgen I, II og til sidst III – men jeg kunne have gjort det i en anden orden.

Jeg vælger at regne på strimlerne i ordenen III, II og så I – svarende til at jeg regner først på den strimmel, der "ligger øverst" og så arbejder mig ned igennem strimlerne.

Beregning af de enkelte strimlers bæreevne:

Strimmel III.

Vi har en statisk model af strimmel III som viser at der er 3 ukendte parametre (p_1, p_2 og R_3), men da der kun er to ligevægtsbetingelser (momentligevægt og lodret ligevægt), så kan den ene af de tre parametre vælges frit.

Jeg vælger frit p_1=0,5p, men et hvilket som helst valg ville være muligt.

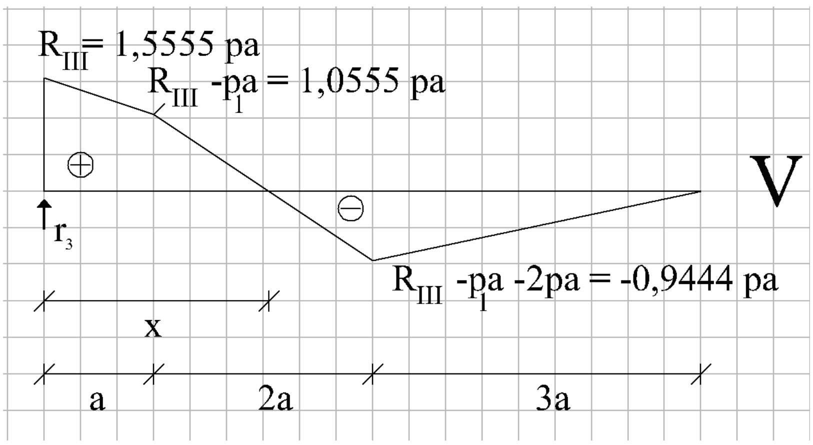
Jeg tager momentligevægt om understøtningen og finder

$$m = -6pa \cdot \frac{6a}{2} + p_1 a \cdot \frac{a}{2} + p_2 3a \cdot \frac{9a}{2} = 0 \Leftrightarrow p_2 = \frac{4}{3}p - \frac{1}{27}p_1 = \frac{71}{54}p \approx 1{,}3148p$$

hvorefter den lodrette ligevægt giver mig

$$R_{III} = 6pa - p_1 a - p_2 3a = \frac{14}{9}pa \approx 1{,}5556pa$$

Jeg tegner nu forskydningskraftkurven op



Da strimmel III har m=0 i hver bjælkeende og forskydningskraftkurven kun har et nulpunkt i

$$x = \frac{37}{18}a \approx 2{,}0556a$$

så er momentet altid positivt i strimmel III og har et maksimum i det punkt, hvor forskydningskraften er lig med nul:

$$m_{\max III} = R_{III}x + p_1 a(x - a/2) - ½px^2 = \frac{1207}{648}pa^2 \approx 1{,}8627pa^2 \le m_u \Leftrightarrow$$

$$p_{III}^{-} \le \frac{648}{1207}m_u / a^2 \approx 0{,}5368m_u / a^2$$

Strimmel II:

Vi har her en symmetrisk belastet strimmel med symmetriske understøtningsforhold, så momentligevægten er per definition opfyldt og der skal blot kontrolleres for lodret ligevægt:

$$R_{II} = p_1 a + pa = \frac{3}{2} pa = 1,5 pa$$

Da belastningen er symmetrisk og al belastningen virker i samme retning, så vil momentmaksimummet findes på midten, hvor vi finder

$$m_{\max II} = R_{II} 2a - p_1 a \frac{3}{2} a - pa \frac{1}{2} a = \frac{7}{4} pa = 1,75 pa \le m_u \Leftrightarrow$$

$$p_{II}^- \le \frac{4}{7} m_u / a^2 \approx 0,5714 m_u / a^2$$

Strimmel I:

Denne behandles på samme måde som strimmel II og vi finder

$$R_I = p_2 a + 4pa = \frac{287}{54} pa \approx 5,3148 pa$$

$$m_{\max I} = R_I 2a - p_2 a \frac{3}{2} a - 4pa \frac{1}{2} a = \frac{719}{108} pa^2 \approx 6,6574 pa^2 \le 5 m_u \Leftrightarrow$$

$$p_I^- \le \frac{540}{710} m_u / a^2 \approx 0,7510 m_u / a^2$$

Nedreværdien

Den samlede nedreværdi for strimlerne findes som den laveste af nedreværdierne, dvs.

$$p^- = \min(p_I^-, p_{II}^-, p_{III}^-) = \min(\frac{540}{710} m_u / a^2, \frac{4}{7} m_u / a^2, \frac{648}{1207} m_u / a^2) = \frac{648}{1207} m_u / a^2 \approx 0,5369 m_u / a^2$$

Andre valg af p_1 og dets konsekvenser

p_1	p_2	$\bar{p}_I$	$\bar{p}_{II}$	$\bar{p}_{III}$	$\bar{p}$
(p)	(p)	(m_u/a^2)	(m_u/a^2)	(m_u/a^2)	(m_u/a^2)
0,00	1,3333	0,7500	0,6667	0,5000	0,5000
0,05	1,3315	0,7501	0,6557	0,5035	0,5035
0,10	1,3296	0,7502	0,6452	0,5070	0,5070
0,15	1,3278	0,7503	0,6349	0,5106	0,5106
0,20	1,3259	0,7504	0,6250	0,5142	0,5142
0,25	1,3241	0,7505	0,6154	0,5179	0,5179
0,30	1,3222	0,7506	0,6061	0,5216	0,5216
0,35	1,3204	0,7507	0,5970	0,5253	0,5253
0,40	1,3185	0,7508	0,5882	0,5291	0,5291
0,45	1,3167	0,7509	0,5797	0,5330	0,5330
0,50	1,3148	0,7510	0,5714	0,5369	0,5369
0,55	1,3130	0,7511	0,5634	0,5408	0,5408
0,60	1,3111	0,7513	0,5556	0,5448	0,5448
0,65	1,3093	0,7514	0,5479	0,5488	0,5479
0,70	1,3074	0,7515	0,5405	0,5529	0,5405
0,75	1,3056	0,7516	0,5333	0,5571	0,5333
0,80	1,3037	0,7517	0,5263	0,5613	0,5263
0,85	1,3019	0,7518	0,5195	0,5655	0,5195
0,90	1,3000	0,7519	0,5128	0,5698	0,5128
0,95	1,2981	0,7520	0,5063	0,5742	0,5063
1,00	1,2963	0,7521	0,5000	0,5786	0,5000

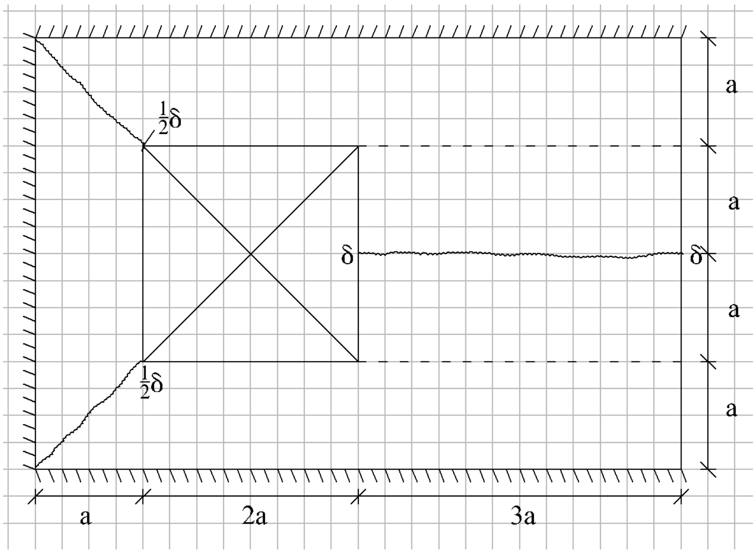
Kommentar:

I dette tilfælde vil det optimale valg være p_1=0,645p, hvilket kræver en del optimering og i dette eksempel blot øger bæreevnen med ca. 2 %. I andre og mere komplicerede eksempler kan en optimering dog øge bæreevnen mere, hvis det er nødvendigt.

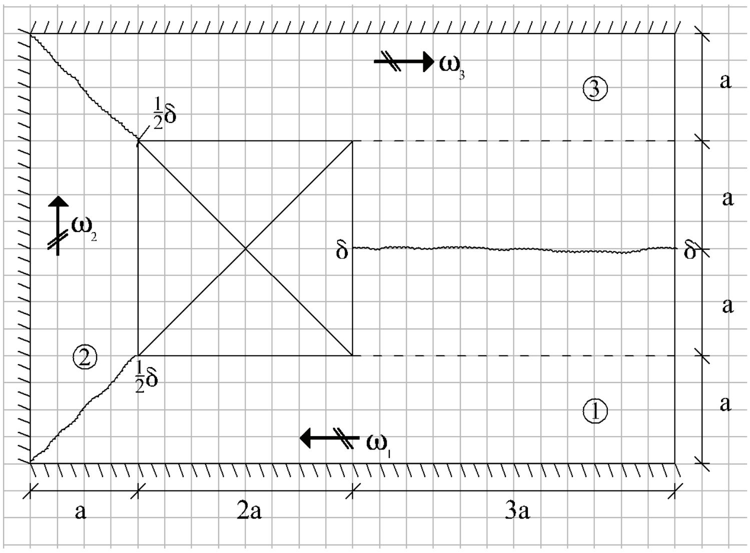
Spørgsmål 2:

Brudfigur

Der er naturligvis en række mulige brudfigurer, men jeg vælger den nedenstående da jeg mener at den er ret optimal



Beregning af indre arbejde



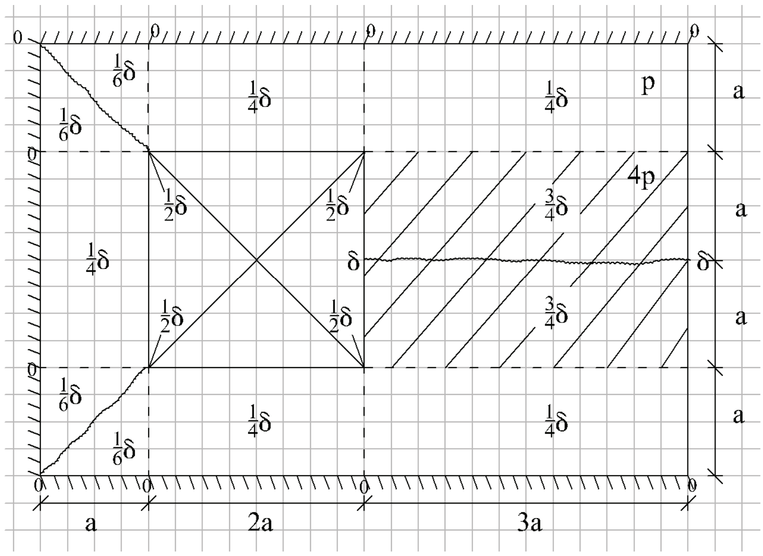
$$\omega_1 = \delta / 2a \qquad \omega_2 = (\delta/2)/a = \delta / 2a \qquad \omega_3 = \omega_1$$

$$A_i^{(1)} = \omega_1(m_u a + 5m_u 3a) = 8\delta m_u \quad A_i^{(2)} = \omega_2(m_u a + m_u a) = \delta m_u \quad A_i^{(3)} = A_i^{(1)} \Rightarrow$$

$$A_i = A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + A_i^{(3)} = 17\delta m_u$$

Beregning af ydre arbejde

Ved beregning af det ydre arbejde opdeler vi pladen i mindre rektangler eller trekanter, hvor der er konstant last og styrke i hver enkelt del. Dette betyder at vi opdeler pladen som vist på figuren nedenfor.



Vi noterer hvert enkelt hjørnes flytning på figuren, hvorefter middelflytningen i hvert delfelt skrives på i en cirkel som vist.

Vi kan nu bestemme det ydre arbejde som

$$A_y = \frac{\delta}{6} p(a^2 \cdot 2) + \frac{\delta}{4} p(3a \cdot a \cdot 2 + 2a \cdot a + 2a \cdot a \cdot 2) + \frac{3\delta}{4} 4p(a \cdot 3a \cdot 2) = \frac{64}{3}\delta pa^2 \approx 21,3333\delta pa^2$$

Beregning af øvreværdien

$$A_y = A_i = A_i \Leftrightarrow \frac{64}{3}\delta pa^2 = 17\delta m_u \Leftrightarrow p^+ = \frac{51}{64}\frac{m_u}{a^2} \approx 0,7969\frac{m_u}{a^2}$$

Betonkonstruktioner
Januar 2012

Opgave B11-18 - Besvarelse

Materialeparametre

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 25 / 1,45 = 17,2 MPa \quad \varepsilon_{cu3} = 3,5 \cdot 10^{-3}$$
$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 500 / 1,2 = 417 MPa \Rightarrow \varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s = 417 / 2 \cdot 10^5 = 2,085 \cdot 10^{-3} \quad \varepsilon_{uk} = 5 \cdot 10^{-2}$$
$$f_{ywd} = f_{ywk} / \gamma_s = 235 / 1,45 = 196 MPa$$

Spørgsmål 1:

Vi vælger b = 0,15 m (fordi bjælken skal ligge på en på en 15 cm tyk væg). Da vi ved at højden h bør ligge på mindst 1/20·L= 0,15 m, vælger vi højden til lidt mere, fx til 0,2 m og finder

g = 0,15·0,20·24 = 0,72 kN/m ⇒ p + g = 15+0,72 = 15,72 kN/m ⇒

$$M_{Ed} = \frac{1}{8}(p+g)\,L^2 = \frac{1}{8} \cdot 15,72 \cdot 2,9^2 = 16,5\ kNm$$

Ved brug af overslagsformlerne finder vi

$$h = \sqrt{800 \cdot M_{Ed} / b} = \sqrt{800 \cdot 16,5 / 0,15} = 297\ mm$$

Vi runder den højde af til en ”Pæn” værdi, nemlig h=300mm.

Dette øger g til g=0,15·0,30·24=1,08kN/m, svarende til M_{Ed}=16,9kNm og dette er så lille en ændring at vi ikke genregner vores overslag (gæt) på h.

Spørgsmål 2:

Design:

$M_{Rd} = z \cdot A_s \cdot f_{yd} \geq M_{Ed} = 16{,}9$ kNm

Vi sætter nu $z \cong 0{,}8\,h = 0{,}8 \cdot 300 = 240mm$ og finder

$$A_s \geq \frac{M_{Ed}}{z \cdot f_{yd}} = \frac{16{,}9 \cdot 10^6}{240 \cdot 417} = 168{,}9\ mm^2$$

Vi vælger 2ø12 $\Rightarrow$ $A_s = 2 \cdot 113{,}1 = 226{,}2$ mm², som er væsentligt over minimumskravet og momentbæreevnen er dermed sikret – forudsat at tværsnittet ikke er blevet overarmeret, men det skulle ikke ske ved brug af overslagsdimensioner. (Havde vi valgt 2ø10, så ville vi have fået $A_s = 2 \cdot 78{,}54 = 156{,}04$ mm² og dermed ligge under minimumskravet).

Eftervisning: Vi har lagt mere armering i end der blev krævet med d=240mm, men vi skal stadigvæk checke om d er blevet mindre (eller alternativt om M_{Rd} er stor nok). Vi har også antaget at bjælken er normaltarmeret, men dette skal også kontrolleres.

Til denne kontrol og til brug i næste spørgsmål beregner vi den effektive højde og armeringsforholdt. Vi regner med at vi senere vil anvende bøjler med max. 6 mm i diameter og sætter dæklaget til 20 + 5 = 25 mm og finder

$$d = 300 - 25 - 6 - 12/2 \quad = 263\ mm > 240mm \qquad \text{OK!}$$

Vi kunne alternativt beregne den plastiske trykzones højde y, indremomentarm z og brudmoment som

$$y = \frac{A_s f_{yd}}{b \cdot f_{cd}} = \frac{226{,}2 \cdot 417}{150 \cdot 17{,}2} = 36{,}6mm \Rightarrow z = d - \frac{1}{2}y = 263 - \frac{1}{2} \cdot 36{,}6 = 247{,}7mm \Rightarrow$$

$$M_{Rd} = A_s f_{yd} z = 226{,}2 \cdot 417 \cdot 247{,}7 = 23{,}08kNm > M_{Ed} = 16{,}9kNm \qquad OK!$$

Vi kontrollerer kravet om normaltarmeret tværsnit ved at beregne tøjningen i trækarmeringen og kontrollerer at den er i flydning, men ikke revet over

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu3}}{x}(d-x) = \frac{\varepsilon_{cu3}}{y/0{,}8}(d - y/0{,}8) = \frac{3{,}5 \cdot 10^{-3}}{36{,}6/0{,}8}(263 - 36{,}6/0{,}8) = 16{,}6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{yd} = 2{,}085 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_s = 16{,}6 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{uk} = 5{,}0 \cdot 10^{-2} \qquad OK!$$

Vægten af armeringen er 2 x 3 m x 0,915 kg/m = 5,49 kg

<u>Spørgsmål 3</u>:

<u>Design:</u> Vi vælger at anvende ø6-bøjler og afkorter ikke armeringen, da bjælken kun er 3 m lang. Vi kan derfor vælge cotθ = 2,5 (som giver den bedste udnyttelse af bøjlerne i forskydning) og ønsker også at have den mindst mulige forskydningskraft. Vi beregner derfor

$$V_{Ed} = R - z\cot\theta\left(p+g\right) = \left(\frac{1}{2}\cdot L - z\ \cot\theta\right)\left(p+g\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 2900 - 244,7\cdot 2,5\right)\cdot 16,08 = 13,48\cdot 10^3\ N = 13,48\ kN$$

Forskydningsstyrke kravet til bøjlerne er

$$s \le \frac{A_{sw}}{V_{Ed}}\cdot z\cdot f_{ywd}\cdot\cot\theta = \frac{2\pi(6/2)^2}{13,48\cdot 10^3}\cdot 244,7\cdot 196\cdot 2,5 = 502,0\ mm$$

De næste krav er kravet om den maksimale bøjleafstand aht skrårevnerne og kravet til bøjlernes minimumsstyrke

$$s \le 0,75d = 0,75\cdot 263 = 197,3mm$$

$$s \le \frac{15,9\,A_{sw}\cdot f_{ywk}}{b_w\cdot\sqrt{f_{ck}}} = \frac{15,9\cdot\left(28,27\cdot 2\right)\cdot 235}{150\cdot\sqrt{25}} = 281,6\ mm$$

Vi kræver at bøjlernes maksimale afstand skal være mindre end den mindste af de 3 afstande, dvs. mindre end 197,3 mm. Vi vælger derfor en mindre og "pænere" afstand s = 175 mm.

<u>Eftervisning</u>: Forskydningsbæreevnen er dermed sikret mht. bøjlerne og alle minimumskrav til bøjlerne er opfyldt. Vi skal dog også checke trykstringeren og finder

$$\nu = 0,7 - f_{ck}/200 = 0,7 - 25/200 = 0,575 \Rightarrow$$

$$V_{Rd,c} = \nu\cdot f_{cd} b_w z\frac{\cot\theta}{1+\cot\theta^2} = 0,7\cdot 17,1\cdot 150\cdot 247,7\frac{2,5}{1+2,5^2} = 126,0kN >> V_{Ed} = 13,48kN$$

Bemærk at det i denne situation ikke er kravet til forskydningsstyrke, der er dimensionsgivende for bøjlerne, men derimod beskyttelsen imod skrårevner.

<u>Vægten af armeringen</u> i bøjlerne bliver

$$\frac{3000}{175}\cdot 2\cdot\left(0,3+0,15\right)\cdot 0,222 = 3,6\ kg$$

<u>Spørgsmål 4</u>:

Vi skal kontrollere værdierne for placering af armering for at checke at den kan udstøbes og forankre armeringen

c = dæklag = 25 mm

$$c_1 = 25 + 6 = 31mm \geq \begin{cases} ø + tolerancetillæg = 12 + 5 = 17mm \\ c + ø_t = 25 + 6 = 31mm \end{cases}$$

$$a = 150 - 2 \cdot (25 + 6 + 12) = 64mm \geq \begin{cases} Ø = 12\ mm \\ d_g + 5\ mm = 16 + 5 = 21\ mm \end{cases}$$

Kravene er således opfyldt og vi kan derfor udstøbe bjælken.

Spørgsmål 5

Vederlagsdybden a=100mm er ret lille og vi kan derfor ikke udnytte trækarmeringens flydestyrke fuldt ud. Når vi beregner basisforankringslængden finder vi

$$l_b = 44Ø = 44 \cdot 12 = 528mm$$

og kan dermed udnytte en styrke på

$$\sigma_{s,\max} = \frac{a}{l_b} f_{yd} = \frac{100}{528} 417 = 79MPa$$

Dette betyder at den forskydende kraft der kan optages af den langsgående trækarmering er

$$V_{Rd,l} = \frac{2\sigma_{s,\max} A_s}{\cot\theta} = \frac{2 \cdot 79 \cdot 2\pi(12/2)^2}{2,5} = 14,3 \cdot 10^3 N \geq V_{Ed} = 13,48 \cdot 10^3 N$$

Dette betyder at forankringen af bjælkens trækarmering er tilstrækkelig.

Hvis bærrevnekravet her ikke havde været opfyldt, kunne vi have øget $V_{Rd,l}$ meget ved at reducere cotθ. Dette ville dog kræve at vi regnede den øvrige forskydningsbæreevne om, dvs.- regnede V_{Ed} og $V_{Rd,c}$ og $V_{Rd,w}$ om og det kunne meget vel medføre at vi skulle øge mængden af bøjler i bjælken.

Spørgsmål 6

Trækarmering og bøjler vejer tilsammen

5,49 + 3,6 = 9,1 kg/bjælke

Med en pris på 40 kr./kg armering inkl. arbejdsløn svarer dette til 364 kr. for armering i en bjælke.

a) Ved produktion af højst 10 bjælker kan det ikke betale sig at optimere meget på dette design: 10% besparelse på 10 bjælker vil give 364 kr. i besparelse – men vil måske kræve 1 times ingeniørarbejde, dvs. 600 kr. i omkostning.

b) Ved produktion af mindst 100 ens bjælker vil det være god ide optimere designet, da vi i den situation kan spare penge.

Betonkonstruktioner
Januar 2012

Oversigt over opgavernes indhold

DTU Civil Engineering
Department of Civil Engineering
Technical University of Denmark

Brovej, Building 118
DK 2800 Kgs. Lyngby
Telephone +45 45 25 17 00

www.byg.dtu.dk